חשמל וגלים לביולוגיה חישובית – פתרון תרגיל 10

1. נציב פונקציה מהצורה $f(x\pm vt)$ באגף שמאל של משוואת הגלים $\ddot{f}=v^2 f''$.

תחילה נסתכל על הנגזרת הראשונה ונקבל $\dot{f}(x\pm vt)=\frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}=\pm v\frac{df}{d\eta}$.

הנגזרת השניה נותנת $\ddot{f}(x\pm vt)=\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{d\eta}\right)\frac{d\eta}{dt}+\frac{df}{d\eta}\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d^2f}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2=v^2\frac{d^2f}{d\eta^2}$.

אגף שמאל נותן בגזירה ראשונה $f'(x\pm vt)=\frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dx}$,

ובגזירה שניה $f''(x\pm vt)=\frac{d^2f}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2=\frac{d^2f}{d\eta^2}$,

ולאחר ההכפלה במהירות בריבוע נקבל שוויון (מ.ש.ל).

2. מיתר של גיטרה אורכו $L=1m$ ומשקלו $M=0.02kg$.

א. ראינו בכתה שהתדירות הבסיסית של מיתר נתונה על ידי הנוסחה $\omega_1=\frac{\pi c}{L}$,

כאשר c היא מהירות התקדמות הגל, ו-L הוא אורך המיתר.

כמו-כן ראינו בכתה שמהירות התקדמות הגל במיתר היא $c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$,

כאשר T היא המתיחות, ו- ρ היא צפיפות המיתר האורכית - $\rho=\frac{M}{L}$.

נציב הכל לקבלת המשוואה $\nu_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=\frac{\pi\sqrt{\frac{TL}{M}}}{2\pi L}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{ML}}=440Hz$,

שנותנת $T=4\cdot 440^2 ML=15488N$.

ב. במצב זה, מהירות התקדמות הגל במיתר הנה $c=\sqrt{\frac{TL}{M}}=880\frac{m}{\sec}$.

ג. כדי לקבל גל בתדירות שונה על ידי שינוי אורך המיתר, נשים לב שלא שינינו את המתיחות במיתר, כלומר c קבוע, ולכן $\nu_1=\frac{c}{2L}=660Hz$.

נחלץ את L ונקבל $L=\frac{c}{2\cdot 660}=\frac{2}{3}m$,

כלומר שצריך לקצר את המיתר ב- $\frac{1}{3}m$.

ד. יש אפשרות נוספת לקבל את התו סי הנ"ל במיתר זה בעזרת הגדלת המתיחות, כלומר חילוץ T מחדש, ולא חילוץ L.

3. נתון מיתר בעל צפיפות אחידה ρ (ק"ג למטר), ובעל מתיחות קבועה T, אשר תפוס בנקודות $x = \pm\frac{L}{2}$.

א. נציב תחילה $x = \frac{L}{2}$: $f_k(x,t) = (A_k \cos\omega t + B_k \sin\omega t)(C_k \cos\frac{kL}{2} + D_k \sin\frac{kL}{2}) = 0$.
כיוון שהמשוואה נכונה לכל t, רק החלק התלוי במיקום יכול להתאפס, כלומר
$C_k \cos\frac{kL}{2} + D_k \sin\frac{kL}{2} = 0$.
מהצבת $x = -\frac{L}{2}$ נקבל $C_k \cos\frac{kL}{2} - D_k \sin\frac{kL}{2} = 0$.
נסכם את המשוואות ונקבל ש- $2C_k \cos\frac{kL}{2} = 0$,
ומהפרש המשוואות נקבל $2D_k \sin\frac{kL}{2} = 0$.
שתי משוואות אלה חייבות להתקיים יחד.
i. אם $\cos\frac{kL}{2} = 0$, אז לא ייתכן שגם $\sin\frac{kL}{2} = 0$, ולכן $D_k = 0$.
במקרה זה נקבל $k_m = \frac{\pi+2\pi m}{L}$ $\cos\frac{kL}{2} = 0 \Rightarrow \frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \Rightarrow$.
ii. האפשרות השניה אומרת ש- $C_k = 0$, וגם $k_n = \frac{2\pi n}{L}$ $\sin\frac{kL}{2} = 0 \Rightarrow \frac{kL}{2} = \pi n \Rightarrow$.

אם-כן הפתרון הכללי ביותר הוא $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m f_m(x,t)$,

כאשר $f_n(x,t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\sin\frac{2\pi n x}{L}$,

ו- $f_m(x,t) = A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m)\cos\frac{\pi x + 2\pi m x}{L}$.

ב. הפתרון של סעיף א' אמור להיות אותו פתרון כמו שקיבלנו בכתה עבור מיתר התפוס בנקודות x=0 ו- x=L, פרט לכך שהזזנו את הציר. בשביל להראות שזה נכון, נבצע את הטרנספורמציה $x \to x - \frac{L}{2}$, ונראה שנקבל את אותו פתרון:

$$f_n(x,t) \to A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\sin\left(\frac{2\pi n x}{L} - \pi n\right),$$

$$f_m(x,t) \to A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m)\cos\left(\frac{\pi x + 2\pi m x}{L} - \frac{\pi}{2} - \pi n\right).$$

וניתן לרשום

$$f_n(x,t) \to A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\sin\left[\frac{\pi x}{L}2n\right],$$

$$f_m(x,t) \to A_m \cos(\omega_m t + \varphi_m)\sin\left[\frac{\pi x}{L}(2m+1)\right],$$

וסכום שני פתרונות אלה הוא למעשה הפתרון המקורי

4. בכלי נגינה שונים (כמו חליל פן) נובע הצליל ממערכות באורך L בעלות קצה אחד סגור וקצה אחד פתוח.

א. לפי הניתוח שעשינו בכתה ברור שבצד התפוס המיתר לא יכול לזוז, כלומר $f(0,t) = 0$,
ובצד הפתוח הנגזרת מתאפסת, כלומר $f'(L,t) = 0$. התנאי הראשון זהה לתנאי
שקיבלנו עבור מיתר קשור, כלומר $C_k = 0$ ונשאר עם פונקצית גל מהצורה
$f_k(x,t) = (A_k \cos\omega t + B_k \sin\omega t)D_k \sin kx$.

מכאן שהתנאי השני נותן $f'_k(L,t) = k(A_k \cos \omega t + B_k \sin \omega t) D_k \cos kL = 0$,

והפתרון היחיד שנותן גל הוא $\cos kL = 0$,

כלומר $kL = \frac{\pi}{2} + \pi n$, מה שנותן $k_n = \frac{\pi}{2L} + \frac{\pi n}{L} = \frac{\pi}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

אופני התנודה המרחביים יהיו $\sin \frac{\pi x}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$,

והתדירויות יהיו $\omega_n = \frac{\pi v}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

התדר הבסיסי הוא $\omega_0 = \frac{\pi v}{2L}$,

ולפי סימון זה התדרים הם $\omega_n = \omega_0(2n+1)$.

ב. התדרים השונים שנשמע מכלי כזה כבר לא יהיו כל הכפולות של התדר הבסיסי, והצליל שנשמע מכלי כזה יהיה צליל חלול, אבל לא מזויף. לכן נגינה בנשיפה בבקבוקים אף פעם לא יכולה להישמע טוב (זאת לעומת הקשה על בקבוקים, שגורמת לתנודה של הזכוכית שיש לה 2 קצוות פתוחים ולכן זה כן יכול להישמע טוב).