חשמל וגלים לביולוגיה חישובית – פתרון תרגיל 6

1. נמצא את ההתנגדות השקולה של המעגלים שבציור (בדף התרגיל):
   א. את המקרה הראשון אפשר להמיר (ע"י שינוי הציור) לשלושה נגדים מחוברים במקביל. לכן ההתנגדות השקולה היא $\frac{R}{3}$.
   ב. במקרה השני, משיקולי סימטרייה ניתן לראות שבנגד האמצעי לא יכול לזרום זרם, לכן אפשר להתעלם ממנו. אם כן, יש שני ענפים מקבילים ובכל ענף יש שני נגדים בטור. בסה"כ נקבל שיש לנו התנגדות שקולה של R.
   ג. ניתן לראות שמערכת זו היא המערכת בסעיף ב' המחוברת במקביל לנגד R יחיד. אם כן נקבל שני נגדים בהתנגדות R המחוברים במקביל ובסה"כ ההתנגדות השקולה היא לכן $\frac{R}{2}$.
   ד. שני הענפים האנכיים מורכבים כל אחד משני חלקים בטור, שבכל חלק יש R המחובר במקביל ל-2R. לכן בענפים האנכיים נקבל בסה"כ התנגדות שקולה של $\frac{4R}{3}$. כמו בסעיף ב', משיקולי סימטרייה, בשני הנגדים האופקיים הנותרים יהיה זרם 0, ולכן הם לא משנים. לכן נקבל חיבור במקביל של שני ענפים בעלי התנגדות שקולה של $\frac{10R}{3}$ כל אחד, ולכן בסה"כ נקבל התנגדות שקולה $\frac{5R}{3}$.

2. ננתח את המעגל שבציור (בדף התרגיל):
   א. נסמן את הזרם על R_1 ב-I_1, את הזרם על C_1 ב- I_2, ואת הזרם על C_2 ועל R_2 ב- I_3. לפי חוקי קירחהוף נקבל את מע' המשוואות הדיפ' הבאות:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ \dot{I}_1 R_1 C_2 + \dot{I}_3 R_2 C_2 + I_3 = 0 \\ \dot{I}_1 R_1 C_1 = I_2 \end{cases}$$

מהמשוואות הנ"ל אפשר לעבור ל- $I_1 + \dot{I}_1\left(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2\right) + \ddot{I}_2 R_1 R_2 C_1 C_2 = 0$,
ננחש פתרון מהצורה $I = Ae^{-\alpha t}$, ונקבל משוואה אלגברית ריבועית שפתרונותיה הם

$$\alpha_{\pm} = \frac{R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2 \pm \sqrt{\left(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2\right)^2 - 4R_1^2C_1C_2}}{2R_1R_2C_1C_2}.$$

הפתרון הכללי, לכן הוא $I_1 = Ae^{-\alpha_+ t} + Be^{-\alpha_- t}$.
מתוך כך שבזמן t=0 נדרוש ש- I_1=0A, נקבל A=-B,
כלומר $I_1 = A\left[e^{-\alpha_+ t} - e^{-\alpha_- t}\right]$.
מכאן קל למצוא $I_3 = A\left[e^{-\alpha_+ t} - e^{-\alpha_- t}\right] - R_1C_1A\left[\alpha_+ e^{-\alpha_+ t} - \alpha_- e^{-\alpha_- t}\right]$.

מתוך כך שבזמן t=0 נדרוש $I_3 = \frac{V}{R_2}$ ניתן לחלץ את A (ולא נעשה זאת). דבר זה מספיק

כדי למצוא את המתחים:

$$\begin{cases} V_{R1} = V_{C1} = AR_1\left[e^{-\alpha_+ t} - e^{-\alpha_- t}\right] \\ V_{R2} = AR_2\left[e^{-\alpha_+ t} - e^{-\alpha_- t}\right] - R_1 R_2 C_1 A\left[\alpha_+ e^{-\alpha_+ t} - \alpha_- e^{-\alpha_- t}\right] \\ V_{C2} = V - V_{R1} - V_{R2} \end{cases}$$

ב. קל לומר מה צריך להיות המתח על כל רכיב בזמן $t=0$ ובזמן t שואף לאינסוף:

על R_1 בזמן $t=0$ לא זורם זרם כלל, כי הוא זורם בקבל, ולכן המתח שם $0V$. בזמן t שואף לאינסוף קבל C_2 גורם לנתק ולכן אין שום זרם במעגל והמתח, לכן הוא $0V$

על C_1 בזמן $t=0$ אין מטען (כי הזרם סופי, לא כמו בשאלה הקודמת), ולכן המתח עליו הוא $0V$. מכיוון שהוא מחובר במקביל לנגד R_1, שעליו בזמן אינסופי אין מתח, אז גם על הקבל אין מתח בזמן t שואף לאינסוף.

על C_2 בזמן $t=0$ אין מטען ולכן המתח עליו הוא $0V$. בזמן t שואף לאינסוף זהו הרכיב היחיד שעליו יש מתח, כלומר המתח עליו V.

בזמן $t=0$ R_2 הוא הרכיב היחיד שעליו יש נפילת מתח, כלומר המתח עליו הוא V. בזמן t שואף לאינסוף אין זרם, ולכן לפי חוק אוהם המתח עליו הוא $0V$.

קל לראות מהמשוואות שזה אכן מתקיים.