חשמל וגלים לביולוגיה חישובית – פתרון תרגיל 3

1. ידוע כי השדה בתוך מוליך מתאפס וכי כל המטען העודף במוליך מתרכז על שפתו.
   א. נניח בשלילה שבשווי משקל השדה בשפת המוליך אינו מאונך לפני המוליך. תחת הנחה זו יש לשדה רכיב בכוון מקביל למשטח ולכן המטענים ינועו על פני המשטח, בניגוד להנחת שווי המשקל.
   ב. קרוב לפני המשטח אפשר להסתכל על המשטח בקירוב כאל מישור, ומצאנו מהו השדה ליד מישור טעון בצפיפות משטחית.
   ג. בזמן חישוב השדה השתמשנו בגליל בעל שטח סופי. לפי חוק גאוס, השדה החשמלי תלוי בסך המטען הכלוא בתוך הגליל, כלומר סך המטען על המשטח שמגדיר הגליל על פני המוליך. כאשר נזיז את הגליל תזוזה קטנה גם כמות המטען במשטח הזה תשתנה בכמות קטנה (וזו אכן הגדרת הרציפות), אלא אם כן ישנה נקודה שבה יש כמות מטען אינסופית, וזה לא ייתכן. לכן, השדה חייב להשתנות באופן רציף כל עוד ניתן לבצע את הקירוב למישור.
   ד. נסתכל על שפיץ בפני המוליך בתור הגבול של פינה מעוגלת כאשר הגבול הוא כאשר העקמומיות של הפינה שואפת לאינסוף. ככל שהעקמומיות גדלה, השטח שעליו מותר לנו להסתכל כדי לקבל קירוב של משטח ישר הולך וקטן. מצד שני, השדה עדיין רציף, ולכן צפיפות המטען לא יכולה להשתנות. הדרך היחידה לקבל תוצאה זו, היא אם המטען באותו משטח שואף לאינסוף. זו לא סתירה לסעיף ג', כי אנחנו מדברים על שאיפה למטען אינסופי בנקודת השפיץ, ולא על מטען אינסופי באופן זהותי.

2. $[E]=\frac{N}{C}=\frac{Nm}{Cm}=\frac{J}{Cm}$.

3. למעשה, כדי למצוא את האנרגיה הדרושה, כל שעלינו לעשות זה למצוא את הפרש הפוטנציאלים בין שתי הנקודות הדרושות:

   במרכז הריבוע הפוטנציאל הוא $\varphi_c=\frac{K}{0.5}\sqrt{2}(4+2-3)=6\sqrt{2}K(V)$,

   ובפינה הרביעית מתקבל פוטנציאל $\varphi_s=K\left(\frac{2}{0.5}-\frac{3}{0.5}+4\sqrt{2}\right)=(4\sqrt{2}-2)K(V)$.

   ולכן העבודה הדרושה היא $W=\Delta V\cdot 1=-2(1+\sqrt{2})K=-4.35\cdot 10^{10}J$.

   זה אומר שבתהליך המתואר מתקבלת אנרגיה. זה לא אומר שצריך להפעיל כוח בכוון ההפוך, כי לא דרשנו שום תנאי על המטען פרט לכך שהוא צריך להגיע ממרכז הריבוע לפינה שלו (זה בדיוק כמו שלא צריך אנרגיה כדי לגלגל כדור בירידה, וזה לא אומר שצריך להפעיל כוח בכוון ההפוך). זה גם לא אומר שהמטען יגיע לשם בכל מקרה, קודם כל כי לא עשינו חישוב לאן הוא באמת יגיע (שוב כמו עם כדור – הוא לא יגיע לכל מקום שנמוך ממנו, רק למסלול אחד ספציפי), וגם בגלל שלא ידועה לנו מהירותו ההתחלתית.

4. בניסוי טיפות השמן של מיליקן דרוש שדה חשמלי של $6.34\cdot 10^4 V/m$ כדי להחזיק רסיס שמן ברחיפה. הטבלאות מרוחקות מרחק של 1.5 ס"מ זו מזו. המתח הוא האינטגרל של השדה לאורך המרחק שבין השדות, אבל במקרה זה השדה קבוע ולכן המתח הוא פשוט מכפלת השדה במרחק, כלומר $V=951V$.

5. מהו הפוטנציאל בכל המרחב הנוצר מהצורות הבאות?

א. תיל מוליך אינסופי טעון בצפיפות מטען אורכית קבועה – ראינו בכתה שהשדה הנוצר מתיל כזה הוא $E(r)=\frac{2K\lambda}{r}$,

והפוטנציאל הוא מינוס האינטגרל מהאינסוף, כלומר $\varphi(r)=-\int_{\infty}^{r}\frac{2K\lambda}{r'}dr'$,

מה שנותן $\varphi(r)=2k\lambda\left(\ln\infty-\ln r\right)$.

נראה כאילו יש בעיה בכך שיש איבר אינסופי, אבל כיוון שהאיבר הזה יופיע בפוטנציאל של כל נקודה, ומה שמעניין אותנו הוא רק ההפרש אז ניתן להתעלם מהאיבר הזה. דרך אחרת להבין את זה היא לזכור שהפוטנציאל מוגדר לפי אינטגרל מנקודת ייחוס שרירותית. כאן עדיף לבחור למשל את הנקודה שבה הרדיוס הוא מטר אחד, ואז האיבר מתאפס. בסה"כ קיבלנו $\varphi(r)=-2K\lambda\ln r$.

ב. משטח מוליך אינסופי טעון בצפיפות מטען משטחית קבועה – ראינו בכתה שהשדה שנוצר ממשטח כזה הוא $E=2\pi K\sigma$,

ושוב הפוטנציאל הוא מינוס האינטגרל מהאינסוף, כלומר $\varphi(x)=2\pi K\sigma\left(\infty-x\right)$.

שוב קיבלנו איבר אינסופי שאפשר להיפתר ממנו (למשל על ידי קביעת נקודת הייחוס על המישור) ולקבל $\varphi(x)=-2\pi Kx\sigma$.