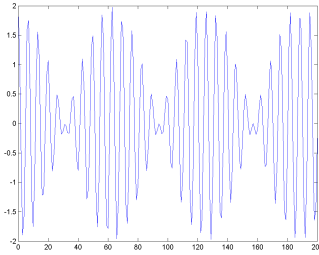


חשמל וגלים לביולוגיה חישובית – שיעור 8

סופרפוזיציה של גלים: כאשר שני גלים משפיעים על אותה נקודה, ההשפעה המתקבלת היא הסכום של שני הגלים.



פעילות: נסתכל על שני גלים בעלי אמפליטודה A ובעלי תדירויות

$$f_1 = A \cos \omega_1 t, \quad \omega_1 \approx \omega_2$$

קרובות, כלומר הגלים הם $f_2 = A \cos \omega_2 t$. נרשום את הסכום של שניהם בנקודה מסוימת לפי נוסחת החיבור של פונקציות קוסינוס. נסמן את תדירות

$$\omega_s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{ואת תדירות הקול} \quad \omega_p = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

ואז $f = 2A \cos \omega_s t \cos \omega_p t$, כלומר יש גל קול בתדירות הקול

שהגדרנו, כאשר האמפליטודה שלו מתנוודת בזמן בתדירות

הפעילות. צריך לדרוש שהתדירויות קרובות זו לזו, כי אחרת תדירות הפעילות כל כך גבוהה שזה בעצמו צליל שניתן לשמוע אותו. אם האמפליטודה של הגלים שונה, נרשום $A_1 = A + \delta$ ו- $A_2 = A - \delta$

$$f = 2A \cos \omega_p t \cos \omega_s t + \delta \cos \omega_2 t$$

ואז מתקבל $f = (2A \cos \omega_p t + \delta) \cos \omega_s t$, כלומר שהאמפליטודה של הפעילות לא מתאפסת לעולם.

התאבכות: נסתכל על שני גלים בעלי תדירות זהה ועוצמה זהה, אבל בעלי הפרש פאזה זה מזה. הגל

$$f = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$$

המתקבל מחיבור שני הגלים הוא (שוב לפי אותה נוסחה) $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$. אם כך, הפרש הפאזה בין הגלים קובע את האמפליטודה של הגל כאשר הפאזה גורמת להתאפסות הגל

קוראים למצב התאבכות הורסת. זה קורה כאשר $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$, כלומר כאשר $\varphi = 2\pi n$. כאשר הפאזה

נותנת אמפליטודה מכסימלית קוראים למצב התאבכות בונה. זה קורה כאשר $\cos \frac{\varphi}{2} = \pm 1$, כלומר

$$\text{כאשר } \varphi = \pi + 2\pi n.$$

התאבכות מ-2 מקורות נקודתיים: נניח שני מקורות זהים שמשדרים ביחד בנקודות $(0, \frac{d}{2})$ ו- $(0, -\frac{d}{2})$

זה שהם משדרים ביחד אומר שביציאה מהמשדר שני המשדרים משדרים $A \cos \omega t$

ובמרחק l מהמשדר נקבל $A \cos(\omega t - kl)$ (בהנחה שאין דעיכה של האמפליטודה). בנקודה (L, y)

המרחקים משני המשדרים הם $l_{\pm} = \sqrt{L^2 + (y \mp \frac{d}{2})^2}$, והגל המתקבל בנקודה הזו הוא לכן

$$f = A[\cos(\omega t - kl_+) + \cos(\omega t - kl_-)]$$

התאבכות בונה תקבל כאשר $\varphi = 2\pi n$, כלומר כאשר $kl_+ - kl_- = 2\pi n$ או כאשר $\Delta l = \frac{2\pi}{k} n = \lambda n$. אפשר לרשום את הפרש הדרכים בתור

$$\Delta l = L \sqrt{1 + \left(\frac{y + \frac{d}{2}}{L}\right)^2} + L \sqrt{1 + \left(\frac{y - \frac{d}{2}}{L}\right)^2}$$

השורש (כלומר $\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$) ונקבל $\Delta l \approx \frac{dy}{L}$. המסקנה היא שנקבל התאבכות בונה עבור

$$\left| \frac{y \pm \frac{d}{2}}{L} \right| \ll 1$$

הנקודות $y = \frac{\lambda L n}{d}$ והתאבכות הורסת עבור $y = \frac{\lambda L}{2d} + \frac{\lambda L n}{d}$. התוצאה המתקבלת נקראת תבנית

התאבכות, ומה שמתקבל (אם נשים למשל מסך ונאיר עליו משני מקומות) הוא אזורי חושך ואור שהמרחקים ביניהם קבועים. נשים לב שהתבנית הזו מתקבלת רק תחת הקירוב שעשינו, כלומר כאשר $dy \ll L$, ובכל מקרה אחר צריך לחשב את Δl המדויק.

אם עוצמת האור של שני המקורות לא שווה, אז בצורה דומה לפעילות, נקבל ש"נקודות החושך" לא יתאפסו לחלוטין.

אפקט דופלר (צופה ניח): נסתכל על צופה במנוחה ומשדר שני במהירות v לעבר הצופה. נסמן את מהירות התקדמות הגל ב- c . המשדר משדר בתדירות ω , כלומר שבין שידור של שני ראשי גל עבור

זמן $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$. בזמן זה עובר המשדר מרחק $\Delta x = v\Delta t$ כאשר ראש הגל הראשון עובר $c\Delta t$, ולכן

$$\lambda' = (c - v)\Delta t = \frac{2\pi c}{\omega} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \lambda \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

אפקט דופלר (צופה נע): אם המשדר במנוחה והצופה נע במהירות v לעבר המשדר, אז עבור הצופה מהירות התקדמות הגל אליו היא $c' = c + v$ ולכן הפרש הזמני בין שני ראשי גל שהוא פוגש הוא

$$\Delta t = \frac{\lambda}{c + v} \text{ ולכן } \omega' = \omega \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

דוגמה: רכבת נוסעת במהירות 90 קמ"ש וצופרת בתדר $f = 440\text{Hz}$. מהו התדר שנשמע כאשר הרכבת מתקרבת וכאשר היא מתרחקת? מה ההבדל בתווים?

פתרון: מהירות הקול היא $c = 300\text{m/sec}$ ומהירות הרכבת $v = 25\text{m/sec}$. כאשר הרכבת מתקרבת

נשמע $f'_a = f \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = 440 \frac{1}{1 - \frac{25}{300}} = 480\text{Hz}$, וכאשר הרכבת מתרחקת נציב מהירות הפוכה, כלומר

נשמע $f'_b = 440 \frac{1}{1 + \frac{25}{300}} = 406\text{Hz}$. נמצא את הפרש התווים לפי יחסי התדרים $\frac{f'_a}{f'_b} = \alpha^x = 2^{\frac{x}{12}}$,

$$x = 12 \log_2 \frac{f'_a}{f'_b} = 2.9$$

דוגמה: מכונית נוסעת במהירות 90 קמ"ש, וצופר אזעקה צופר בתדר $f = 440\text{Hz}$. מהו התדר שישמעו נוסעי המכונית בהתקרבת לצופר ובהתרחקת ממנו? מהו ההבדל בתווים?

פתרון: במקרה זה נשתמש בנוסחה השנייה, וכאשר המכונית מתקרבת לצופר נקבל שהתדר החדש

הוא $f'_a = f \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 440 \left(1 + \frac{25}{300}\right) = 476.67\text{Hz}$ וכאשר המכונית מתרחקת נציב מהירות

הפוכה ונקבל $f'_b = 440 \left(1 - \frac{25}{300}\right) = 403.33\text{Hz}$. היחס הוא כמובן זהה, ולכן הפרש התווים זהה.

אפקט דופלר יחסותי: לפי הניתוח שעשינו יש הבדל בין תנועה של מקור לבין תנועה של צופה, אבל זה סותר את תורת היחסות. הסיבה היא שבמקרה של גלי קול יש תווך מסוים – האוויר – שלפיו מודדים את מהירות הקול. במקרה של אור, המהירות נמדדת לפי מי שרואה אותו. התוצאה של זה (שלא

נוכיח אותה) היא שביחסות צריך להכפיל אורכים וזמנים של מערכות נעות בפקטור $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$,

כאשר עכשיו c היא מהירות האור. אם נעשה את זה נקבל שבשני המקרים $f' = f \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$ ולכן אין

סתירה של עקרון היחסות.