חשמל וגלים לביולוגיה חישובית – שעור 7

מהו גל? מחיי היומיום אנחנו מכירים סוגים רבים של גלים (גלים בים, גלים בפני המים כשזורקים אבן לבריכה, גלי קול, גלי אור ורדיו, נפילה של חלקי דומינו, גלים בקהל ועוד רבים). לאחר מחשבה קצרה קל להגיע למסקנה שהגל הוא איזושהי הפרעה של המערכת ממצב המנוחה שלה שמתקדמת במרחב. לרוב, הגל מתקדם במהירות (פחות או יותר) קבועה ועם צורה (פחות או יותר).

גלים אורכיים ורוחביים: אם נסתכל בדוגמאות של הגלים השונים נוכל לראות שכיוון ההפרעה הוא לא בהכרח באותו כיוון כמו כיוון התקדמות ההפרעה. למשל, גלים בחוט נעים לאורך החוט כאשר ההפרעה היא בכוון ניצב לכוון ההתקדמות. לגלים כאלה נקרא גלים רוחביים. במקרה של הדומינו כיוון ההפרעה הוא באותו כיוון כמו כיוון ההתקדמות. לגלים כאלה נקרא גלים אורכיים.

גל בממד אחד: נדון בגל שנע במהירות קבועה תוך שמירה על צורתו בממד אחד (הכי קל לחשוב על גל שמתקדם בחוט). נגדיר פונקציה שמתארת את צורת הגל במרחב בזמן t=0, ובשביל הדיון נסתכל על גל שיש לו "בליטה" אחת שמתיחה במיקום x=-a, שיאה נמצא במיקום x=0, ומסתיימת במיקום x=a.בשביל לצייר את הפונקציה נצייר את ההפרעה (הפרעה של מה?) כפונקציה של המיקום, כאשר הזמן הוא נתון נוסף שלא נכנס לגרף. בזמן t=1 הפונקציה תראה בדיוק אותו דבר, פרט לכך שהיא תזוז בכוון התקדמות הגל והשיא יהיה במיקום x=vt. בצורה דומה אפשר לצייר את ההפרעה במיקום x=0 כפונקציה של הזמן. במקרה זה התחלת הבליטה יהיה בזמן t=-a/v, שיא הבליטה יהיה בזמן t=0 וסוף הבליטה יהיה בזמן t=a/v. אם נסתכל על מיקום x=1 הפונקציה תישאר זהה, פרט לכך שהיא תזוז ימינה כך שהשיא יהיה בזמן t=1/v. המסקנה היא שהפונקציה שמגדירה את ההפרעה היא אמנם פונקציה של משתנה יחיד, אבל המשתנה הזה תלוי גם בזמן וגם במיקום, כך שהגל מתקדם במרחב במהירות קבועה. אם כך, פונקצית הגל היא מהצורה $f(\eta) = f(x - vt)$.

גל רוחבי במיתר: נפתח את המשוואה לתיאור תנועת גל רוחבי במיתר אינסופי בעל מתיחות T וצפיפות ρ. נסתכל על הקטע (x_1, x_2) ונרשום עבורו את משוואת הכוחות. נניח שההפרעה קטנה, כלומר שזווית הסטייה מקו ישר היא קטנה, ואז יש לנו קירוב זוויות קטנות, כלומר $\cos\theta \approx 1$ וגם $\sin\theta \approx \tan\theta$. בקירוב הזה שקול הכוחות שפועל בציר X הוא 0, ולכן נותר לדון רק בציר Y, שם מתקבל $F_y = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 \approx T\left(\tan\theta_2 - \tan\theta_1\right)$. לפי הגדרת הנגזרת $\tan\theta = y'$, ולכן אפשר לרשום $F_y = T\left[y'(x_2) - y'(x_1)\right]$. נשתמש גם בחוק ניוטון שאומר $F_y = m\ddot{y} = \rho(x_2 - x_1)\ddot{y}$, ואז בגבול נקבל $\rho\ddot{y} = Ty''$. אם נגדיר $v = \sqrt{T/\rho}$ נקבל את משוואת הגלים $\ddot{y} = v^2 y''$.

גל אורכי בחומר אלסטי: נסתכל על גל אורכי בחומר אלסטי אינסופי, ובשביל לנתח את התופעה הגלית הזו נפרק אותה לתנועה של מסות בדידות המחוברות בקפיצים, וניקח את המערכת בחזרה לגבול הרציף. נחלק את החומר לקטעים באורך Δx. המסה של כל קטע כזה היא $m = \rho\Delta x$, וקבוע הקפיץ המחבר את שתי המסות הוא $K = \frac{T}{\Delta x}$. נסמן את הסטייה של מסה ממצב שווי המשקל שלה ב- $u(x)$. משוואת התנועה של המסה היא $m\ddot{u}(x) = K\left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] - K\left[u(x) - u(x-\Delta x)\right]$. לפי הגדרת קבוע הקפיץ מתקבל כאשר שואפים לרצף $m\ddot{u}(x) = T\left[u'(x) - u'(x-\Delta x)\right]$ (כמובן שזה לא ממש מדויק מתמטית), ולפי הגדרת המסה נוכל שוב לרשום $\rho\ddot{u}(x) = Tu''(x)$, ולכן שוב קיבלנו את אותה משוואת גלים, $\ddot{u} = v^2 u''(x)$.

פתרונות למשוואת הגלים: קל לראות שפונקציות גל מהצורה שקיבלנו קודם הם אכן פתרונות למשוואה, וכמובן שגם סכום של פונקציות גל כאלה הם פתרונות למשוואה, אבל האם אלה כל הפתרונות? נשתמש בשיטה לפתרון משוואות דיפרנציאליות שנקראת הפרדת משתנים, שבה מנחשים שאת הפתרון אפשר להפריד לחלקים שתלויים כל אחד במשתנה אחד. ננחש שאפשר לרשום את הפתרון בתור $f(x,t) = \varphi(x)\phi(t)$, ואז משוואת הגלים נכתבת כ- $\varphi(x)\ddot{\phi}(t) = v^2\varphi''(x)\phi(t)$, כלומר

$\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = v^2 \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$. אגף ימין תלוי אך ורק במיקום, ואגף שמאל תלוי אך ורק בזמן והם שווים. המסקנה היחידה היא ששני האגפים שווים לקבוע, כאשר הדרך היחידה שהפונקציה לא תשאף לאינסוף היא שהקבוע יהיה שלילי. נסמן $\phi(t) = -\omega^2 \ddot{\phi}(t)$ ואז הפתרון הוא מהצורה $\phi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. עבור החלק התלוי במיקום נסמן $k = \omega v$, ואז $\varphi(x) = -k\varphi''(x)$, והפתרון לכך הוא $\varphi(x) = C\cos kx + D\sin kx$. נזכור שהפתרון הזה תלוי בבחירה השרירותית שלנו של ω או k, ולכן הפתרון של פונקצית הגל תלוי גם הוא באותו פרמטר. נבחר לסמן בעזרת k, שנקרא מספר הגל או מספר הפתרון, ואז $f_k(x,t) = A_k\cos\eta_+ + B_k\sin\eta_+ + C_k\cos\eta_- + D_k\sin\eta_-$, כאשר $\eta_\pm = kx \pm \omega t$ הפתרונות האלה נקראים פתרונות של גלים הרמוניים. יש עוד שתי דרכים לרשום גלים הרמוניים: $f_k(x,t) = A_k\cos(\eta_+ + \varphi_+) + B_k\cos(\eta_- + \varphi_-)$, או לפי המכפלה של שני הפתרונות שמצאנו. הפתרון הכללי של הבעיה הוא סכום של כל הפתרונות עבור כל מספר גל, כלומר $f(x,t) = \int a_k f_k(x,t)dk$.

<u>הערה מתמטית:</u> ניתן להוכיח (ולא נעשה זאת) שכל פונקציה מהצורה $f(\eta)$ אפשר לרשום בצורה שמצאנו. דרך אחרת לומר את זה היא שגלים הרמוניים פורשים את מרחב פונקציות הגל. הדרך שבעזרתה מוצאים את המקדמים a_k נקראת טרנספורם פורייה.

<u>מיתר קשור:</u> נסתכל על מיתר שקשור גם ב x=0 וגם ב x=L. במקרה כזה יש לנו תנאים על הגלים ההרמוניים שמותר לנו להשתמש בהם, כי מותר רק להשתמש בפונקציות שמקיימות את התנאים בכל זמן, כלומר קודם כל נדרוש $f_k(0,t) = 0$, כלומר $C_k = 0$ כאשר השתמשנו בהצגה של מכפלת הפתרונות. הפתרון היחיד שאפשרי כאן הוא $C_k = 0$, כי האפשרות השניה נותנת שהקבועים שלנו תלויים בזמן. נותרנו עם פונקצית גל $f_k(x,t) = (A_k\cos\omega t + B_k\sin\omega t)D_k\sin kx$, ואם נציב בה את התנאי השני נקבל $\sin kL = 0$, כלומר $k_n = \frac{\pi n}{L}$, ולכן אפשר למספר את הגלים ההרמוניים שקיבלנו לפי $f_n = A_n\cos(\omega t + \varphi_n)\sin\frac{\pi n x}{L}$, והפתרון הכללי הוא $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$.

למעשה מצאנו את אופני התנודה של מיתר קשור (אפשר גם לצייר אותם). לאופן הראשון קוראים גם הצליל הבסיסי של המיתר, ואופני התנודה הגבוהים יותר נקראים Overtones.

<u>עוד הערה מתמטית:</u> בעצם מצאנו שכל הפונקציות בעלות מחזור L ניתנות לפרישה ע"י אופני התנודה של מיתר קשור.

<u>צלילים במיתר:</u> כשפורטים על מיתר שומעים בו זמנית הרבה צלילים, צליל שונה מכל אופן תנודה. כאשר פורטים במיתרים שונים בעלי אותו צליל יסודי, או כאשר פורטים באותו מיתר במיקום שונה, גוון הצליל משתנה. זה בגלל שבכל מקרה משתנה עוצמת אופני התנודה הגבוהים יותר.

<u>שמיעת צלילים:</u> באוזן יש אפרכסת שמע שרוחבה הולך וקטן. כל רוחב נכנס לתהודה רק כאשר אורך הגל של הצליל נכנס בו מספר שלם של פעמים. במצב זה, דפנות האפרכסת רועדים ומרעידים שערות קטנות בדופן האפרכסת. השערות מחוברות לקצות עצבים שמעבירים את האות למוח. נסתכל על שני גלים בעלי אורכי גל $\lambda_1 = 2\lambda_2$. אם מערכת כפי שתוארה נכנסת לתהודה מהגל הראשון, אז היא תכנס לתהודה גם מהגל השני. המסקנה היא שבהכרח אנחנו מפענחים שני צלילים כאלה בתור אותו תו (למרות שכמובן שאפשר להבחין שבדובר בצליל גבוה יותר). לדוגמה, אם 440Hz הוא התו לה אז גם 880Hz הוא התו לה, רק גבוה יותר.

<u>צלילים ותווים:</u> כאמור, כאשר התדר מוכפל פי 2 מקבלים את אותו תו, רק גבוה יותר. להפרש התווים הזה קוראים אוקטבה שלמה, ובה יש 12 תווים, וזה נכון לכל תו שניקח. הדרך היחידה שבה התנאים האלה מתקיימים היא שבשביל לעבור מתו לתו מכפילים את התדירות ב $\alpha = 2^{\frac{1}{12}}$. לדוגמה נראה בכמה צריך להכפיל את התדירות של התו דו בסולם דו מז'ור:

C		D		E	F		G		A		B	C
דו		רה		מי	פה		סול		לה		סי	דו
1	1.06	1.12	1.19	1.26	1.33	1.41	1.5	1.59	1.68	1.7	1.88	2

עכשיו נבדוק מהם התווים של אופני התנודה הגבוהים יותר:

1. כפי שאמרנו אופן הבסיס הראשון הוא דו f_1.
2. האופן השני (שהוא ה-Overtone הראשון) הוא דו $f_2 = 2f_1$.
3. האופן השלישי הוא סול $f_3 = 3f_1 = 2 \cdot 1.5 f_1 \approx$.
4. האופן הרביעי הוא דו $f_4 = 4f_1 = 2f_2$.
5. האופן החמישי הוא מי $f_5 = 5f_1 = 4 \cdot 1.25 f_1 \approx$.

<u>אקורדים:</u> אקורד מז'ור הוא שילוב של 3 התווים המופיעים באופן טבעי בצליל היסודי של מיתר הבסיס. כלומר אקורד דו מז'ור כולל את התו דו, את התו מי ואת התו סול. באופן כללי אקורד מז'ור כולל את תו הבסיס, את התו ש-4 תווים מעליו, ואת התו ש-7 תווים מעל תו הבסיס. באקורד מינור מחליפים את התו השני בתו שנמצא רק 3 תווים מעל צליל היסוד.

<u>סולם פנטטוני:</u> בסולם התווים המזרחי יש רק 5 תווים. לפי הטבלה שעשינו קודם נקבל שהסולם המזרחי הוא בערך דו, רה, פה, סול, סי דיאז, דו $(1,1.14,1.32,1.51,1.74,1)$. אם נתחיל מסול נקבל בערך סול, לה, דו, רה, פה, סול. בסולם המדויק יש סטיות מהצלילים שמוכרים לנו, ולכן לנו זה יכול להישמע כאילו יש כל הזמן קצת זיופים.

<u>מיתר פתוח:</u> נחזור לפיתוח משוואת הגלים עבור מיתר, אבל נסתכל על הקצה שלו כאשר המיתר לא מוחזק. במקרה זה פועל על המיתר כוח רק מצד אחד ולכן נקבל ש- $\rho(x_2 - x_1)\ddot{y} = -Ty'(x_1)$. כאשר ניקח את אורך הקטע לאפס אגף שמאל ישאף ל-0. באגף ימין המתיחות לא יכולה להשתנות, כי היא קבועה בכל המיתר,ולכן נוותר עם האפשרות ש- y' שואף ל-0. אם כך במיתר פתוח תנאי השפה אינו שערך הפונקציה מתאפס, אלא שהנגזרת המרחבית שלה מתאפסת. דבר זה נכון בכל מקרה שבו יש קצה של מערכת שלא יכול להפעיל כוח. בצינור, למשל, צד פתוח הוא צד שלא יכול להפעיל כוח.

נסתכל על פתרונות משוואת הגלים למערכת באורך L הפתוחה בשני קצותיה. במקרה זה התנאי הראשון משתנה ל- $f_k'(0,t) = 0$, מה שנותן דווקא $\left(A_k \cos\omega t + B_k \sin\omega t\right)D_k = 0$ (נזכור שקודם כל גזרים ורק אח"כ מציבים את x). הפתרון היחיד האפשרי הוא $D_k = 0$, כלומר שנקבל רק פונקציות מהצורה $f_k(x,t) = (A_k \cos\omega t + B_k \sin\omega t)C_k \cos kx$. נציב את התנאי השני ונקבל שוב $\sin kL = 0$, כלומר $k_n = \frac{\pi n}{L}$, ושוב אפשר למספר את הגלים ההרמוניים שקיבלנו לפי $f_n = A_n \cos(\omega t + \varphi_n)\cos\frac{\pi n x}{L}$, והפתרון הכללי הוא $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$.