חשמל וגלים לביולוגיה חישובית – שעור4

קבלים: נתחיל לדון ברכיבים חשמליים שמשמשים במעגלים חשמליים. הרכיב הראשון נקרא קבל. קבל הוא זוג מוליכים אשר אחד מהם טעון במטען Q והשני במטען Q-. המוליכים נקראים גם הדקי הקבל.

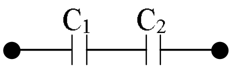
קיבולת: לכל קבל יש תכונה שנקראת קיבולת, שתלויה אך ורק במבנה הגיאומטרי שלו. הקיבולת של קבל מוגדרת לפי $C=\frac{Q}{V}$, כאשר Q הוא המטען על אחד ההדקים ו-V הוא המתח בין ההדקים. לפי ההגדרה אפשר לראות שניתן להתייחס אל הקיבול כאל עד כמה גדל המתח בין ההדקים על תוספת של יחידת מטען.

יחידות: הקיבול נמדד ביחידות הנקראות Farad, ומסומנות באות F.

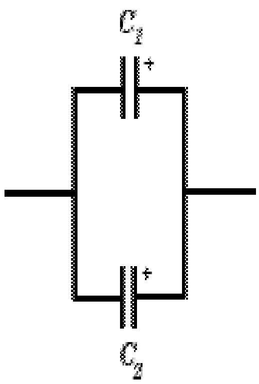
סימון: כשנרצה לסמן קבל במעגל חשמלי נצייר ┤├.

קבל לוחות: הסוג הפשוט ביותר להבנה של קבל. הקבל בנוי כמו הסימון שלו – שני לוחות בשטח A כל אחד הטעונים במטען Q ו-(Q-), המרוחקים זה מזה מרחק d. בתנאי שניתן להתייחס ללוחות כאל לוחות אינסופיים (מהו התנאי?) אז השדה בתוך הקבל הוא $E=4\pi K\sigma$ (ומחוץ לקבל 0). השדה קבוע, ולכן המתח בין ההדקים הוא $V=4\pi K\frac{dQ}{A}$. נסמן $\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi K}$ ואז הקיבול הוא $C=\varepsilon_0\frac{A}{d}$, וזה אכן תלוי רק במבנה הגיאומטרי של הקבל.

האם Farad היא יחידה גדולה? נניח שיש לנו קבל לוחות שקיבולו 1F והמרחק בין הלוחות שלו מילימטר אחד. מהו שטחו? $A=\frac{d}{\varepsilon_0}=1.13\cdot10^8\,m^2$, ואם נניח שמדובר בריבוע אז אורך הצלע הוא 10.6 ק״מ. המסקנה היא ש-Farad היא יחידה עצומה, ולכן בד״כ מדברים על קבלים עם קיבול של מיקרו-Farad, כלומר $\mu F=10^{-6}F$.



חיבור קבלים בטור: המתח בין 2 קצוות ההתקן נתון (למשל על ידי בטריה), והדרך היחידה לעבור מקצה לקצה היא דרך שני הקבלים, כלומר שהם מחוברים בטור. המטען על כל אחד מהקבלים זהה ולכן המתח על הראשון הוא $V_1=Q/C_1$ והמתח על השני הוא $V_2=Q/C_2$ וידוע ש- $V=V_1+V_2$. מכאן נקבל $V=Q(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})$, ואם נרצה להשוות את זה לקבל יחיד, שמקיים $V=\frac{Q}{C}$ אז מתקבל מיד $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$.



חיבור קבלים במקביל: אם הקבלים מחוברים במקביל, כלומר שבין 2 קצוות ההתקן אי אפשר לעבור דרך שני הקבלים בלי שהמסלול יחתוך את עצמו (דרך אחרת היא לומר שבשביל לעבור דרך כל קבל פעם אחת צריך לנוע במסלול סגור פשוט), אז המתח על כל קבל זהה, אבל המטענים שונים, כי $Q_i=VC_i$. סך המטען שיצא מצד אחד של ההתקן הוא $Q=Q_1+Q_2=V(C_1+C_2)$, ואם נרצה להשוות את זה לקבל יחיד שמקיים $Q=VC$ אז מתקבל מיד $C=C_1+C_2$.

דוגמה: 2 קבלים בני $2\mu F$ ו- $4\mu F$ מחוברים במקביל זה לזה. אליהם מחובר בטור קבל שלישי בן $3\mu F$, ועל כל המערכת יש מתח של 1200V. מהו המטען על כל קבל ומהו המתח על הקבל המחובר בטור?

פתרון: קיבולם המשותף של שני הקבלים המחוברים במקביל הוא $6\mu F$, וכשהמערכת של שניהם מחוברת בטור לקבל השלישי נקבל קיבול שקול כולל של $2\mu F$. המתח נתון,

ולכן המטען הכולל שנמצא על מערך הקבלים הוא $Q = 2.4 \cdot 10^{-3} C$. בקבל המחובר בטור מצטבר כל המטען שמצאנו, וכיוון שקיבולו ידוע אז המתח עליו הוא800V. דבר זה משאיר מתח של 400V לכל אחד משני הקבלים הנותרים. אם כך, כיוון שידוע קיבולו של כל אחד מהקבלים נוכל למצוא את המטען, שהוא $1.5 \cdot 10^{-3} C$ עבור הקבל הגדול יותר, ו $0.8 \cdot 10^{-3} C$ עבור הקטן מביניהם.

<u>חילוץ גאוס:</u> באופן כללי כאשר יש לנו הרבה קבלים מחוברים במערך כלשהו, נוכל לרשום עבורם מערכת של משוואות המורכבת משני חלקים – חלק אחד שנובע מכך שבין 2 נקודות יש אותו מתח ללא תלות בדרך שבחרנו, וחלק שני הנובע מכל שהמטען הכולל על כל מוליך מנותק במערך הוא 0. אי לכך נקבל מערכת של משוואות ליניארית, שאותן צריך לדעת לפתור. הדרך הקלה ביותר (אבל לא היעילה ביותר) לפתור מערכת כזו היא בעזרת חילוץ גאוס.

נניח שיש לנו n משוואות ליניאריות ב-n משתנים. המשוואה ה-i היא מהצורה $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$. ניתן לרשום את המערכת גם בתור $A\vec{x} = \vec{b}$, כאשר $A_{ij} = a_{ij}$ מטריצה, $\vec{x}_i = x_i$ וקטור עמודה,ו- $\vec{b}_i = b_i$ וקטור עמודה. למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם $\det(A) \neq 0$. בשביל למצוא את הפתרון מספיק לרשום את המטריצה $A\,|\,b$ ולבצע עליה רק 2 סוגי פעולות על מנת לשנות את המערכת למשוואה $I\vec{x} = \vec{b}'$, שהיא כמובן התשובה המבוקשת. הפעולות המותרות הן:

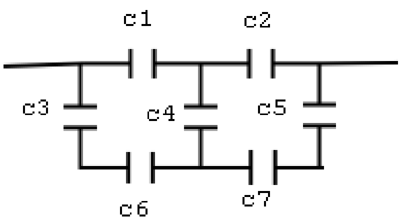
1. ניתן להכפיל שורה בקבוע.
2. ניתן להוסיף שורה לשורה אחרת.

קל לראות למה הפעולות האלה מותרות, כי הן לא משנות את ערכי הפתרון. מסקנה נוחה מפעולות אלה היא שניתן גם להחליף בין שורות.

<u>דוגמה:</u> נתונה מערכת המשוואות $3x_1 + 2x_2 = 8$, $8x_1 + x_2 - 6x_3 = 23$, $x_2 + x_3 = 0$. אם כך

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & -6 & 23 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 8 & 1 & -6 & 23 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & -6 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 18 & -5 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$



<u>דוגמה:</u> נראה דוגמה פשוטה לצורה שבה מגיעים למערכת המשוואות. נתונה המערכת בציור וידוע המתח הכולל על המערכת וקיבול כל קבל ורוצים למצוא את המטען על כל קבל. תחילה נרשום את התנאים שאומרים שהמטען על כל מוליך מנותק הוא 0. זה נותן $-Q_1 + Q_2 + Q_4 = 0$, $-Q_3 + Q_6 = 0$, $-Q_6 - Q_4 + Q_7 = 0$, $-Q_7 + Q_5 = 0$. כעת נוסיף עוד תנאים בלתי תלויים לגבי המתח, למשל $V_3 + V_6 - V_4 - V_1 = 0$, $V_4 + V_7 - V_5 - V_2 = 0$, $V_1 + V_2 = V$. כיוון שידוע ש- $Q_i = V_i C_i$ אז יש פה 7 משוואות ב-7 נעלמים וניתן לפתור את הבעיה.

<u>מקדם דיאלקטרי:</u> ראינו שבמוליכים האלקטרונים יכולים לזוז עד למצב שהם מנטרלים לחלוטין את השדה החיצוני שמופעל עליהם. במבודדים האלקטרונים לא נפרדים מהגרעינים שלהם, אבל עדיין הם יכולים לזוז קצת ולנטרל את השדה החשמלי. אם השדה החיצוני המופעל על חומר מבודד (שנקרא גם חומר דיאלקטרי) הוא E_0 והשדה בחומר הוא E, אז המקדם הדיאלקטרי היחסי של החומר מוגדר לפי $\kappa = \frac{E_0}{E}$. נסתכל על קבל מלא בחומר דיאלקטרי. במקרה כזה נקבל $\frac{E_0}{E} = \frac{dV_0}{dV} = \frac{\frac{V_0}{Q}}{\frac{V}{Q}} = \frac{C_0}{C}$,

ולכן נקבל $C = \kappa C_0$. בד"כ מגדירים את המקדם הדיאלקטרי $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$, כאשר מדובר על אותו $\frac{1}{4\pi K} = \varepsilon_0$, הנקרא המקדם הדיאלקטרי של הריק. נסתכל על קיבול של קבל לוחות מלא בחומר דיאלקטרי, ונקבל שהקיבול שלו הוא $C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d}$. מתוך כך נסיק שבביטוי לקיבול של קבל מלא בחומר דיאלקטרי צריך להחליף כל מופע של ε_0 ב- ε (זו הסיבה שזה נקרא המקדם הדיאלקטרי של הריק).

<u>אנרגיה של קבל:</u> נסתכל תחילה על מצב שבו קבל כבר טעון במטען Q ורוצים להוסיף לו עוד מטען dQ. העבודה הנדרשת לביצוע ההעברה הזו היא $dW = V(Q)dQ$, כאשר ידוע ש- $V(Q) = \frac{Q}{C}$, ולכן בסה"כ $W = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2}\Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$.

<u>קבל כדורי:</u> קבל כדורי מורכב משתי קליפות כדוריות מוליכות בעלות מרכז משותף. נסמן את רדיוס הקליפה הפנימית ב- r_1 ואת רדיוס הקליפה החיצונית ב- r_2. נניח שהקליפה הפנימית טעונה במטען Q והקליפה החיצונית טעונה במטען (-Q). הפרש הפוטנציאלים בין שני הדקי הקבל הוא $V = \frac{KQ}{r_1} - \frac{KQ}{r_2}$, ולכן הקיבול מקיים $\frac{1}{C} = \frac{K}{r_1} - \frac{K}{r_2}$. נשים לב שאם רדיוס הקליפה החיצונית שואף לאינסוף נקבל קיבול $C = \frac{r_1}{K}$, כלומר שכדור טעון בפני עצמו הוא קבל. בתאי עצב אנחנו מוצאים תופעה כזו בנוירונים, כי גוף הנוירון הוא כדור עם מטען חשמלי (ראו תמונה). לכן ניתן להתייחס לתא עצב כאילו יש לו קבל בקצהו. ננסח את הקיבול בעזרת המקדם הדיאלקטרי - $C = \varepsilon_0 4\pi r_1 = \varepsilon_0 \frac{4\pi r_1^2}{r_1}$, ששוב נותן לנו שהקיבול הוא השטח הרלוונטי מחולק באורך הרלוונטי, ומוכפל במקדם הדיאלקטרי.