

חשמל וגלים לביולוגיה חישובית – שיעור 2

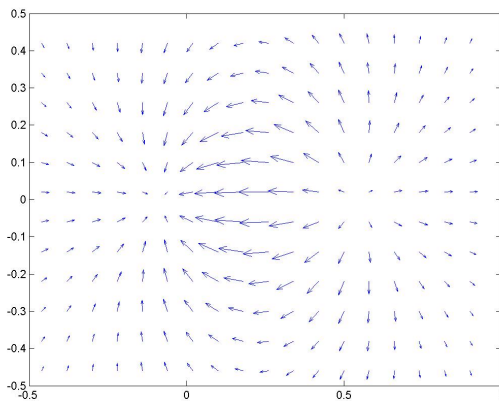
השדה החשמלי: כששני מטענים נמצאים אחד בקרבת השני הם מרגישים כוח שפועל עליהם. לא הגיוני להניח שהמטענים "יודעים" שיש שם מטען נוסף. איך ניישב את הסתירה לכאורה?
 נאמר שכל מטען משפיע על כל המרחב כל הזמן, בלי קשר לשאלה האם יש במרחב מטען או לא. להשפעה הזו נקרא השדה החשמלי, ונסמן אותו באות \vec{E} . כל מטען (אחר) שיימצא בשדה החשמלי ירגיש כוח $\vec{F} = q\vec{E}$.

ניסוח שקול: השדה החשמלי בנקודה מסוימת מראה מהו הכוח שהיה פועל על יחידת מטען אם היא הייתה מונחת באותה נקודה.

עקרון הסופרפוזיציה: סופרפוזיציה משמעו הנחת משהו על משהו אחר. כיוון שהכוחות שפועלים על גוף מתחברים ווקטורית, אז גם השדה מתחבר ווקטורית.

ציור השדה: בכל נקודה במרחב אפשר לצייר חץ שכוונו הוא כוון ווקטור השדה, וגודלו גודל ווקטור השדה. את השדה של מטען בודד קל לצייר (ונועשה זאת גם למטען חיובי וגם לשלילי). מתוך כך אפשר לצייר את השדה עבור סופרפוזיציה של כמה מטענים. בציור רואים את השדה של מטען חיובי (מימין) ושלילי (משמאל). בצורה דומה ניתן לצייר את השדה החשמלי עבור כל התפלגות מטענים.

יחידות: לפי הגדרת השדה, קל לראות שהיחידות שלו הן ניוטון למטר.



ביטוי מתמטי לשדה: מטען q הנמצא במיקום \vec{r}_0 יגרום לשדה במרחב $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Kq}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

קווי שדה: דרך נוספת לצייר את השדה החשמלי היא לחבר את וקטורי השדה לקווים. ציורים כאלה הם בדרך כלל יותר קריאים, אבל אין בהם אינפורמציה על עצמת השדה. בדרך כלל אפשר לצייר את הציור כך שקווי השדה קרובים יותר זה לזה במקום שבו עוצמת השדה החשמלי גדולה יותר. קווי שדה תמיד מתחילים במטען חיובי ומסתיימים במטען שלילי. עוד תכונה היא שקווי השדה לא יכולים לחצות זה את זה, פרט לנקודות שבהם יש מטען. זאת בגלל שכוון השדה החשמלי (בכל נקודה שבה אין מטען) מוגדר היטב, וכוון קו השדה החשמלי זהה לכוון השדה.

השטף החשמלי: נגדיר גודל מתמטי חדש, אשר נשתמש בו הרבה בהמשך הקורס. השטף של השדה

החשמלי דרך משטח S כלשהו מוגדר בנוסחה $\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{n}$, כאשר dn הוא ווקטור יחידה אשר

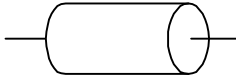
מוגדר לכל נקודה על גבי המשטח וכוונו ניצב למשטח באותה נקודה. המשמעות היא שאנחנו מבצעים אינטגרל על החלק של השדה החשמלי שניצב למשטח ויוצא דרכו, ולא מתעניינים בחלק שניצב למשטח. אפשר לחשוב על זה בצורה הבאה: אם נחשוב על השדה החשמלי כשדה המתאר את מהירות הזרימה של נוזל, אז השטף דרך המשטח אומר כמה מהנוזל עובר במשטח ליחידת זמן (לבדוק יחידות).

דוגמה: נחשב את השטף החשמלי סביב מטען נקודתי, בעזרת משטח כדורי ברדיוס r שמרכזו במטען. לפי ההגדרה הזו השדה ניצב למשטח, ולכן נשאר עם אינטגרל על גודל השדה. גודל השדה על המשטח קבוע, ולכן השטף הוא מכפלת גודל השדה בגודל המשטח, כלומר $\phi_E = 4\pi Kq$, ללא תלות ברדיוס.

טענה: השטף החשמלי דרך כל משטח סגור הכולל מטען נקודתי הוא $\phi_E = 4\pi Kq$.

"הוכחה": קווי שדה מתחילים ונגמרים רק במטענים. כל משטח חוסם כדור, ועבורו הוכחנו. בהפרש בין הכדור למשטח נכנסים ויוצאים אותם קווי שדה, ולכן האינטגרציה מתאפסת, ונקבל את אותו השטף עבור כל המשטח.

חוק גאוס: המסקנה מכל זה היא שלכל משטח סגור A השטף הוא $\phi_E = \sum 4\pi K q_i$, כאשר q_i הם



כל המטענים הכלואים במשטח A. חוק זה נקרא חוק גאוס.

דוגמה: נבדוק מהו השדה ליד תיל אינסופי הטעון בצפיפות מטען אורכית $\lambda \frac{C}{m}$. משיקולי סימטרייה השדה חייב להיות בכיוון רדיאלי והעוצמה חייבת

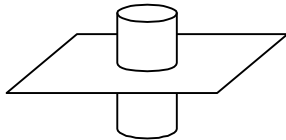
להיות תלויה במרחק מהתיל. לכן נבחר להסתכל על השטף דרך גליל באורך L וברדיוס r, שהציר המרכזי שלו מתלכד עם התיל. כיוון שכוון השדה רדיאלי, השטף דרך הבסיסים מתאפס. על המעטפת, לעומת זאת, נקבל את גודל השדה, שקבוע על פני המעטפת. לכן נקבל שהשטף על כל הגליל הוא

$$\phi_E = 2\pi r L E(r) = 4\pi K \lambda L$$

$$E(r) = \frac{2K\lambda}{r}$$

דוגמה: נבדוק מהו השדה ליד מישור טעון בצפיפות מטען משטחית

$\sigma \frac{C}{m^2}$. משיקולי סימטרייה השדה חייב להיות ניצב למישור. נבחר שוב



משטח גלילי ברדיוס r ובאורך 2L ונציב אותו בניצב למשטח, כך שמרחקי הבסיסים מהמשטח שווים. השטף דרך מעטפת הגליל מתאפס הפעם, והשטף היחיד הוא דרך הבסיסים. גם הפעם נקבל שהאינטגרל הופך למכפלה של עצמת השדה

בשטח, כלומר $\phi_E = 2\pi r^2 E(L)$. המטען בתוך הגליל הוא $\pi r^2 \sigma$, ולכן לפי חוק גאוס נקבל

$$E(L) = 2\pi K \sigma$$

השדה בין לוחות טעונים: נסתכל על 2 לוחות מוליכים מקבילים, הטעונים במטען זהה בגודלו והפוך בסימנו. בין הלוחות נקבל שדה כפול מקודם, כלומר $E(L) = 4\pi K \sigma$, ומחוץ ללוחות השדה מתאפס.

חומרים מוליכים ומבודדים: כאמור, בכל חומר יש אלקטרונים. בחומרים מוליכים הפעלה של שדה חשמלי משחררת את האלקטרונים מהאטומים שלהם. בחומרים מבודדים אם השדה מספיק חלש האטומים יישארו בגרעין. ברור שההגדרה היא למעשה שרירותית ותלויה בצרכים המעשיים שלנו. אנחנו נתייחס לחומר מוליך כחומר שבו כל שדה משחרר את האלקטרונים מהאטומים, ולחומר מבודד כחומר שהאלקטרונים שלו לעולם לא משתחררים מהאטומים.

טענה: השדה בתוך מוליך מתאפס.

הוכחה: נניח בשלילה שיש אזור עם שדה בתוך המוליך. האלקטרונים באותו אזור ירגישו כוח וינעו נגד כוון השדה ובכך יקטינו את השדה באותו אזור. זה ימשך כל עוד יש שדה ששונה מאפס.

טענה: המטענים במוליך מרוכזים על שפתו.

הוכחה: נניח בשלילה שיש מטען בנקודה מסוימת בתוך המוליך. לפי חוק גאוס, בקטע קטן סביבו יש שדה שונה מ-0, בסתירה לטענה הקודמת.

ניסוי טיפות השמן של מיליקן: מסתבר שכשמרססים טיפות שמן ממרסס הטיפות יוצאות טעונות.

חלק מהטיפות יוצאות טעונות יותר וחלק פחות. אם לא מפעילים שום שדה חשמלי אז פועל על הטיפות כוח המשיכה וכוח העילוי. שני הכוחות האלה ידועים, כי ידועה צפיפות השמן והרדיוס הממוצע של טיפת שמן. מיליקן ריסס את טיפות השמן לבין שתי טבלאות מקבילות טעונות במטען זהה בגודלו והפוך בסימנו, ובדק מהי עוצמת השדה שצריך להפעיל כדי שטיפה מסוימת תהיה בשווי משקל. מתוך כך אפשר למצוא מה מטען טיפת השמן. במשך 4 שנים (מ-1909 עד 1913) מדדו מיליקן ועוזריו מטענים של אלפי טיפות, וגילו שלכל המטענים היה מטען שהוא בדיוק (עד כדי דיוק הניסוי) כפולה שלמה של מה שאנחנו קוראים היום מטען האלקטרון, כאשר לרובם היה בדיוק מטען אחד, לקצת פחות שניים וכו'.