מכניקה לביולוגיה חישובית – תרגיל 8

1. שני אסטרונאוטים בעלי מסה $M = 70Kg$ כ"א נמצאים בתחנת חלל. עקב תקלה הם מועפים החוצה במהירויות $V_a = 7\frac{cm}{\sec}$, $V_b = 10\frac{cm}{\sec}$. אסטרונאוט a מחזיק פטיש במסה $m = 2Kg$, וזורק אותו לעבר b על מנת לחזור לתחנה. נסמן את מהירות הזריקה ב- V. כיוון שאין כל כוחות הפועלים בבעיה, יש שימור תנע. לאחר הזריקה הראשונה נקבל שלאסטרונאוט a יש מהירות V_2, כלומר $(M+m)V_a = m(V_a+V)+MV_2$.
כאשר b מקבל את הפטיש מתקבל $m(V_a+V)+MV_b = (M+m)V_3$.
b מסוגל לזרוק את הפטיש במהירות מכסימלית $V_{max} = 15\frac{m}{\sec}$,
ולכן נניח שהוא אכן זורק במהירות המכסימלית, ואז $(M+m)V_3 = m(V_3+V_{\max})+MV_4$.
בשביללמצוא מהי המהירות המכסימלית שמותר ל- a לזרוק את הפטיש נדרוש ש-b יכול לחזור לתחנה, כלומר $V_4 < 0$. מכאן נקבל $(M+m)V_3 < m(V_3+V_{\max})$,
ומכאן נוכל לחלץ את V_3 ולקבל $V_3 < \frac{m}{M}V_{\max}$.
נציב זאת במשוואה השניה ואז $m(V_a+V)+MV_b < (M+m)\frac{m}{M}V_{\max}$,
ומכאן $V < \frac{M+m}{M}V_{\max} - \frac{M}{m}V_b - V_a = 11.86\frac{m}{\sec}$.
אם נחסר את 2 המשוואות הראשונות נקבל $(M+m)(V_a - V_3) = M(V_2 - V_b)$,
ולכן $V_2 > \frac{M+m}{M}V_a + V_b - \frac{m}{M}V_{\max} = -0.26\frac{m}{\sec}$,
כלומר שני האסטרונאוטים יכולים לחזור לתחנה אבל ללא הפטיש.

2. נשווה בין גרביטציה אוניברסלית לגרביטציה על פני כדה"א.

א. נבדוק באיזה גובה $\frac{GM}{(R_e+h)^2} = 0.99g$,
כאשר ידוע ש- $\frac{GM}{R_e^2} = g$,
כלומר $R_e^2 = 0.99(R_e+h)^2$,
והתוצאה המתקבלת היא $h \approx \frac{R_e}{198} \approx 32Km$.

ב. נבדוק באיזה גובה $-\frac{GM}{R_e+h} + \frac{GM}{R_e} = 0.99gh$.
נציב שוב את $GM = R_e^2 g$, ונקבל $R_e(R_e+h) - R_e^2 = 0.99h(R_e+h)$,
כלומר $0.99h^2 - 0.01R_e h = 0$.
פתרון ה-0 לא מעניין, ולכן נקבל $h = \frac{R_e}{99} \approx 65Km$.

3. מרכזם של שני כדורים במסה טון כ"א נמצאים במרחק של חצי מטר זה מזה. התאוצה הגרביטציונית שפועלת ביניהם היא $\frac{Gm}{r^2} = 2.67 \cdot 10^{-8}\, g$.

4. מטאור גדול נופל ממנוחה ממרחק של 6 רדיוס-ארץ אל כדה"א.

א. הכוח משמר, ולכן נוכל להשתמש בשיקולי אנרגיה $-\frac{GM}{6R_e} = -\frac{GM}{R_e} + \frac{1}{2}V^2$,

נציב $GM = R_e^2 g$ ואז $-\frac{gR_e}{6} = -gR_e + \frac{1}{2}V^2$,

כלומר $V = \sqrt{\frac{5}{3}gR_e} \approx 10.33\frac{Km}{\sec}$.

ב. נניח שיש למטאור מהירות משיקית תחילית. במקרה כזה צריך להשתמש בפוטנציאל האפקטיבי, ואם המטאור מגיע לפני כדה"א אז מתקיים

$$-\frac{GM}{6R_e} + \frac{1}{2}V_\theta^2 = -\frac{GM}{R_e} + \frac{1}{2}V_\theta^2\frac{(6R_e)^2}{R_e^2} + \frac{1}{2}V_r^2,$$

נציב שוב $GM = R_e^2 g$, ונדרוש ש- $V_r^2 < 0$, כדי שהמשוואה לא תוכל להתקיים

במציאות ונקבל $-\frac{gR_e}{6} + \frac{1}{2}V_\theta^2 < -gR_e + 18V_\theta^2$,

כלומר $V_\theta > \sqrt{\frac{gR_e}{21}} = 1.75\frac{Km}{\sec}$.

5. ללוויין גיאו-סטציונרי יש את אותו זמן מחזור כמו לסיבוב כדה"א. ראינו שלווייניים מקיימים

את הנוסחה $T = \frac{2\pi}{R_e\sqrt{g}}r^{\frac{3}{2}}$,

ומכאן נחלץ $r = 4.26 \cdot 10^7\, m$,

ולכן הגובה מעל פני כדה"א הוא $h = r - R_e \approx 36000\, Km = 0.12l\sec$.