מכניקה לביולוגיה חישובית – פתרון תרגיל 5

1. אם המרחק הממוצע בין כדה"א לירח הוא $3.8\cdot10^8\,m$, ומשך הקפה אחת של הירח סביב כדה"א לוקחת 28 ימים, אז $a_r=\omega^2R=\left(\frac{2\pi}{28\cdot86400}\right)^2 3.8\cdot10^8=2.56\cdot10^{-3}\ \frac{m}{\sec^2}$.
נשווה בין תוצאה זו לתוצאה שקיבלנו לתאוצה שמפעילה השמש על כדה"א, ונראה שהתאוצה היא בערך חצי מהתאוצה שמפעילה השמש.

2. כוח אופקי בן 50 ניוטון דוחף בול לאורך 3 מטר על פני משטח אופקי. כוח החיכוך המתנגד לתנועה הוא בן 10 ניוטון.
   א. עבודת הכוח הדוחף היא $W_F=3\cdot50=150J$.
   ב. עבודת כוח החיכוך היא $W_f=3\cdot(-10)=-30J$.
   ג. את השינוי באנרגיה הקינטית נוכל למצוא לפי חוק שימור האנרגיה, שאומר שהשינוי באנרגיה הקינטית שווה לסך העבודה שבוצעה על הגוף, כלומר השינוי הוא 120J.
   נחשב זאת גם לפי קינמטיקה – אם הגוף מתחיל ממהירות V_0 כלשהי ופועל עליו כוח $F=40N$ אז תאוצתו (לפי החוק השני) היא $a=\frac{F}{m}$.
   המיקום שלו הוא $x=V_0t+\frac{1}{2}at^2$,
   ולכן הזמן שלוקח גוף לעבור 3 מטרים מקיים $V_0t+\frac{1}{2}at^2=3$,
   כלומר $t=\frac{-V_0+\sqrt{V_0^2+6a}}{a}$.
   המהירות הגוף היא $V=V_0+at$,
   כלומר לאחר 3 מטרים $V=\sqrt{V_0^2+6a}$.
   כעת נוכל לחשב את הפרש האנרגיה הקינטית $\Delta E_k=\frac{1}{2}m(V_0^2+6a)-\frac{1}{2}mV_0^2$,
   כלומר $\Delta E_k=3F=120J$.

3. גוף במסה 30 ק"ג תלוי מחוט חסר מסה שאורכו 1 מטר.
   א. נחפש את המצב שבו המסה הוסטה בזווית של 60 מעלות. אם כך פועל עליה כוח אופקי F, כוח המתיחות T בכוון בחוט, והמשקל כלפי מטה. כיוון שמדובר במצב ש"מ, נרשום את משוואת התנועה $T\cos60^\circ-mg=0$,
   ו- $F-T\sin60^\circ=0$,
   ומכאן נקבל $F=mg\tan60^\circ=300\sqrt{3}N$.
   ב. העבודה שמבצע הכוח האופקי במהלך הסטת המסה הוא הפרש האנרגיה המכנית. כיוון שאין תנועה לא בהתחלה ולא בסוף, אז העבודה היא רק הפרש האנרגיה הפוטנציאלית הגרביטציונית. נקבע את נקודת הייחוס כנקודה שממנה יצאה המסה, ואז נקבל $W=-mgR(1-\cos60^\circ)=150J$.

ג. לאחר ההסטה המסה נעזבת. מהירותה המכסימלית תתקבל כאשר כל האנרגיה הפוטנציאלית תהפוך לאנרגיה קינטית (וזאת בגלל שקבענו את נקודת הייחוס במקום שהמסה יכולה להגיע אליו – אחרת היינו צריכים לחפש איפה נקבל מינימום), כלומר בחלק התחתון, כאשר המסה תחזור לנקודת ההתחלה. מהירותה תקיים $\frac{1}{2}mV^2 = W$, כלומר $V = \sqrt{10}\ \frac{m}{\sec}$.

4. גוף במסה 50 ק"ג מחליק במהירות V על מסילה אופקית חסרת חיכוך, ומגיע ללולאה מעגלית במסילה, שגובהה 12 מטר.

א. הכוח הצנטריפטלי שפועל על הגוף הוא כמו תמיד $F_r = \frac{mV^2}{R}$.
הכוח הצנטריפטלי יהיה מינימלי כאשר האנרגיה הקינטית של הגוף תהיה מינימלית. כיוון שהכוחות בבעיה משמרים, אז זה אומר שזה יקרה בנקודה שבה האנרגיה הפוטנציאלית מכסימלית, כלומר בראש המסלול.

ב. אם הגוף יגיע למעלה בלי להתנתק, אז הוא יעשה את כל הסיבוב בלי להתנתק, משיקולי סימטרייה. לכן, נוודא שבחלק העליון של המסילה הגוף לא מתנתק, כלומר שפועל עליו כוח נורמלי. בחלק זה מתקיים באופן כללי $mg + N = F_r$,
ואנחנו נבדוק מתי בדיוק בנקודה זו כבר לא פועל כוח נורמלי, כלומר $mg = F_r$.
נסמן את המהירות בראש המסילה ב- V_t. נקבע את נקודת הייחוס של האנרגיה הפוטנציאלית הגרביטציונית בחלק הישר של המסילה ואז $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mV_t^2 + 2mgR$,
כלומר $V_t^2 = V^2 - 4gR$.
נציב את זה בתנאי שקיבלנו ואז $mg = \frac{mV^2 - 4mgR}{R}$,
כלומר $V^2 = 5gR \quad \Rightarrow \quad V = 10\sqrt{3}\ \frac{m}{\sec}$.

5. מסילה מורכבת מחלק ישר שאורכו מטר, המחובר בצדו האחד לרבע עיגול חלק בעל רדיוס של 20 ס"מ, ובצדו השני לקפיץ אופקי. מסה משוחררת מקצה המסילה המעגלית. אם החלק האופקי בעל חיכוך דינמי (כולל החלק שאליו מחובר הקפיץ)

א. לפי חוק שימור האנרגיה הכולל, השינוי באנרגיה המכנית שווה לעבודת הכוחות הלא משמרים. לכן כאשר המסה מגיעה לקפיץ מתקיים $-l\mu mg = \frac{1}{2}mV_1^2 - mgR$,
כלומר $V_1^2 = 2gR - 2\mu\lg$.

ב. כדי לחשב את כיווץ הקפיץ המכסימלי אפשר נשתמש באותו שיקול כמו בסעיף א', ואז מתקבל $-(l+x)\mu mg = \frac{1}{2}kx^2 - mgR$,
נרשום את המשוואה הריבועית מחדש $kx^2 + 2\mu mgx + 2mg(\mu l - R) = 0$,
ולכן $x = \frac{\mu mg + \sqrt{(\mu mg)^2 - 2mgk(\mu l - R)}}{k}$.

ג. כשהמסה עוזבת את הקפיץ נקבל $-(l+2x)\mu mg = \frac{1}{2}mV_2^2 - mgR$,
כלומר $V_2^2 = 2gR - 2\mu(l+2x)g$.

ד. בשביל שהמסה תעצור בדיוק לפני החלק המעגלי נדרוש $-2(l+x)\mu mg = -mgR$,
נחסר את המשוואה שקיבלנו בסעיף ב' ונקבל $-(l+x)\mu mg = -\frac{1}{2}kx^2$,

נסמן $F = \mu mg$, ואז $kx = F + \sqrt{F^2 + 2Fk}$.

נסמן $U = mgR$, ואז תנאי העצירה הוא $2(kl + F + \sqrt{F^2 + 2klF})F = kU$,

כלומר $-\sqrt{F^2 + 2klF} = F + kl - \frac{kU}{2F}$.

נעלה בריבוע ונקבל $F^2 + 2klF = F^2 + 2klF + k^2l^2 - kU - \frac{k^2lU}{F} + \frac{k^2U^2}{4F^2}$,

נכפיל ונצמצם ונקבל $kl^2 - U - \frac{klU}{F} + \frac{kU^2}{4F^2} = 0$,

ומכאן $4(kl^2 - U)F^2 - 4klUF + kU^2 = 0$,

כלומר $F = \frac{2klU \pm \sqrt{4k^2l^2U^2 - 4kU^2(kl^2 - U)}}{4(kl^2 - U)} = \frac{klU + \sqrt{4kU^3}}{2(kl^2 - U)}$,

ומכאן $\mu = \frac{klR + 2R\sqrt{kmgR}}{2(kl^2 - mgR)}$.

נוודא לפי גבולות שהתוצאה נכונה:

הגבול הקל ביותר לבדיקה הוא $R \to 0$, שנותן לנו $\mu = 0$, כי אם אין אנרגיה התחלתית אז אם רוצים שהגוף ינוע בכלל אז חייבים שלא יהיה חיכוך כלל.

גבול פשוט נוסף הוא כאשר $l \to \infty$. כיוון שהמכנה תלוי בריבוע המרחק והמונה רק ליניארי במרחק אז החיכוך שואף ל-0, כרצוי.

הגבול הבא הוא $k \to \infty$, שאומר למעשה שאין קפיץ. במקרה זה השורש במונה זניח, ובמכנה האיבר הקבוע זניח ואנחנו נשארים רק עם $\mu = \frac{R}{2l}$, שהוא אכן הפתרון למשוואה $2\mu mgl = mgR$, שהיא אכן המשוואה כאשר מתעלמים מהחיכוך בזמן התנועה עם הקפיץ.

<u>הערה:</u> כאשר מסתכלים על גבולות, תמיד צריך להשוות בין 2 גדלים. למעשה, הדרך הנכונה להתייחס לגבול האחרון היא כאשר האיבר השני במונה זניח לעומת הראשון, תנאי שאפשר לרשום בתור $\frac{1}{2}kl^2 >> mgR$. בשני הגבולות הראשונים למעשה הסתכלנו על $R << l$. מסיבה זו אין משמעות להסתכל על הגבול של המסה, כי אין למה להשוות אותה.