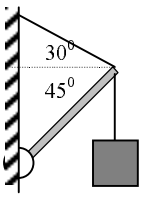
מכניקה לביולוגיה חישובית – פתרון תרגיל 3

1. נוכיח את הזהויות הבאות הקשורות למכפלה הוקטורית:
   א. בהינתן שני ווקטורים, נקבע את ציר X בכוון הוקטור הראשון $\vec{a}$, ואת ציר Y כך שוקטור $\vec{b}$ יהיה במישור XY. במצב זה ראינו בכתה ש- $\vec{a}\times\vec{b}=(0,0,ab\sin\theta)$. התוצאה, אם כן, היא בכוון ציר Z, ולכן ניצבת לשני הווקטורים. מ.ש.ל.

   ב. $\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}=(a_yc_z+b_yc_z-a_zc_y-b_zc_y, a_zc_x+b_zc_x-a_xc_z-b_xc_z, a_xc_y+b_xc_y-a_yc_x-b_yc_x)$, כלומר
   $$=([a_y+b_y]c_z-[a_z+b_z]c_y,[a_z+b_z]c_x-[a_x+b_x]c_z,[a_x+b_x]c_y-[a_y+b_y]c_x)$$
   $$=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}$$
   מ.ש.ל.

   ג. לפי הגדרת הדטרמיננטה מתקבל מיידית ש- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$. מ.ש.ל.

2. ברור שהמתיחות בחוט האנכי שווה ל-W. נסתכל על כל הכוחות הפועלים על המוט: פועל כוח T של מתיחות החבל האנכי, כלפי מטה. פועל כוח T_2 בכוון החבל הנטוי, וכמו כן פועל כוח מהקיר $\vec{N}=(N_x,N_y)$. שקול הכוחות שווה 0, לכן $N_x=T_2\cos 30^\circ$, וגם $N_y+T_2\sin 30^\circ=W$.



נבחר את הציר בנקודת חיבור המוט לקיר. שקול המומנטים שווה ל-0, וכיוון שהכוח שמפעיל הקיר לא מפעיל מומנט נקבל $T_2 l\sin 75^\circ = Wl\sin 45^\circ$.

מכאן כבר מקבלים $T_2=W\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}\le 500$ קג"כ,

כלומר $W\le 683$ קג"כ.

זה לא מספיק, כי אולי התנאי של המוט ייתן משקל נמוך עוד יותר. מהצבה במשוואות שקיבלנו מתקבל $\vec{N}=W\left(\dfrac{\sin 45^\circ\cos 30^\circ}{\sin 75^\circ},1-\dfrac{\sin 45^\circ\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ}\right)$.

אבל אנחנו צריכים לדעת מהו גודל הכוח שפועל במגמה לכווץ המוט, כלומר בכוון של הווקטור $a=\left(\cos 45^\circ,\sin 45^\circ\right)$.

נקבל $a\cdot\vec{N}=\dfrac{W}{2\sin 75^\circ}\left(\cos 30^\circ+\sin 45^\circ-\sin 30^\circ\right)\le 1000$ קג"כ,

ונקבל $W\le 1800$ קג"כ.

3. דלת שגובהה 2.1 מטר ורוחבה 90 ס"מ תלויה על שני צירים המרוחקים 1.8 מטר זה מזה, ומרוחקים 15 ס"מ מכל קצה של הדלת. משקל הדלת הוא 30 קג"כ והיא אחידה, כלומר כוח המשיכה פועל במרכזה. בהנחה שכל ציר נושא במחצית המשקל, מהו הכוח האופקי הפועל על כל ציר?

   ניקח את הציר התחתון בתור הציר שלנו. ברור שהכוחות שפועלים על הציר התחתון לא משפיעים על המומנט סביב ציר זה. ברור גם שרכיב הכוח האנכי שפועל על הציר העליון.

   המומנט שמפעיל כוח המשיכה על הציר הוא $M_g=0.45\cdot W$.

המומנט שמפעיל הכוח האופקי שפועל על הציר העליון הוא $M_F = 1.8 \cdot F_1$.

מכך ששני המומנטים חייבים להיות שווים נקבל $F_1 = \frac{W}{4} = 7.5$ קג"כ.

מתוך התנאי ששקול הכוחות חייב להיות שווה 0 נקבל שהכוח האופקי שפועל על הציר התחתון שווה בגודלו לכוח האופקי שפועל על הציר התחתון והפוך בכוונו.

4. נניח שנתונים שני כוחות $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ הפועלים בנקודות $\vec{R}_1, \vec{R}_2$. אם קיים כוח שקול אז הוא מקיים $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. אם יש נקודה שבה ניתן להתייחס כאילו שם פועל הכוח השקול אז חייב להתקיים $\vec{F} \times \vec{R} = \vec{F}_1 \times \vec{R}_1 + \vec{F}_2 \times \vec{R}_2$. נבחר את מערכת הצירים שלנו בצורה הבאה: נבחר את ראשית הצירים בנקודה $\vec{R}_2$. נבחר את ציר X להיות בכוון $\vec{F}_1$ ואת ציר Y כך ש- $\vec{F}_2$ במישור XY. אם כך ניתן לרשום $\vec{R}_1 = (R_{1x}, R_{1y}, R_{1z}), \quad \vec{R}_2 = (0,0,0)$,

ו- $\vec{F}_1 = (F_1,0,0), \quad \vec{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y},0)$.

נסמן גם $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z) \quad \vec{F} = (F_1 + F_{2x}, F_{2y},0)$.

$$\vec{F} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_1 + F_{2x} & F_{2y} & 0 \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = (F_{2y}R_z, -(F_1 + F_{2x})R_z, (F_1 + F_{2x})R_y - F_{2y}R_x),$$

$$\vec{F}_1 \times \vec{R}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_1 & 0 & 0 \\ R_{1x} & R_{1y} & R_{1z} \end{vmatrix} = (0, -F_1R_{1z}, F_1R_{1y}),$$

$\vec{F}_2 \times \vec{R}_2 = 0$.

לכן, התנאי שרשמנו מתפרש ב-3 משוואות: $F_{2y}R_z = 0$,

$(F_1 = F_{2x})R_z = F_1R_{1z}$,

$(F_1 + F_{2x})R_y - F_{2y}R_x = F_1R_{1y}$.

המשוואה הראשונה נותנת שתי אופציות:

א. מתקיים $F_{2y} = 0$, ואז $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$.

ב. מתקיים $R_z = 0$, ואז לפי המשוואה השנייה $R_{1z} = 0$, ואז קווי הפעולה של שני הכוחות נמצאים במישור XY.