מכניקה לביולוגיה חישובית – שעור 7

טמפרטורה: לפי איך שמודדים טמפרטורה אפשר לראות שאנחנו בעצם מודדים התפשטות של חומרים. חומרים מתפשטים בגלל שהמהירות הממוצעת שלהם גדלה, ולמעשה כי האנרגיה הקינטית הממוצעת שלהם גדלה. הטמפרטורה במעלות קלווין מקיימת $k_B T = \frac{1}{2} m\bar{v}^2$. האנרגיה במערכת מתחלקת באופן שווה בין כל אופני התנודה (עקרון החלוקה השווה) וזה החום – האנרגיה. לכן אפשר לחמם משהו בלי שהטמפרטורה שלו גדלה.

חוקי הגזים: נסתכל על שטח A על דופן של מיכל מלא בגז. נניח שכל חלקיקי הגז זהים ונעים במהירות קבועה. אין גרביטציה או כוחות אחרים בבעיה. נניח גם שכל החלקיקים נעים כך שהם פוגעים ישירות במשטח. אם כך, בפרק זמן Δt פוגעים בקטע המשטח כל החלקיקים הנמצאים בנפח $V = Av\Delta t$. נגדיר את צפיפות החלקיקים n, בתור היחס בין מספר החלקיקים לבין הנפח שהם נמצאים בו. מספר החלקיקים בנפח הוא לכן $N = Av\Delta tn$. מהו התנע שמוסר כל חלקיק לקיר? נניח שההתנגשות היא אלסטית, ואז שינוי המהירות של כל חלקיק הוא פעמיים המהירות המקורית שלו (כי הקיר לא זז), ואז כל חלקיק מוסר תנע $\Delta p = 2mv$. לכן התנע הכולל שנמסר לשטח המדובר ביחידת הזמן הוא $p_{tot} = 2Amv^2 n\Delta t$, כלומר ליחידת שטח ביחידת הזמן נקבל $p = 2mv^2 n\Delta t$.

כיוון שידוע שהתנע ליחידת זמן הוא הכוח, אז הכוח שפועל על הדופן ליחידת שטח הוא $F = 2mv^2 n$. הכוח ליחידת שטח מוגדר בתור הלחץ, ומסומן (גם הוא) באות P, ומקיים $P = 2mv^2 n$. נציב את הגדרת הטמפרטורה ונקבל $PV = Nk_B T$ (הקבועים מסתדרים כאשר מתייחסים לזה שיש התפלגות מהירויות והתפלגות כיוונים). למשוואה זו קוראים חוק הגזים.

יחידות של לחץ: משקל של ק"ג אחד ליחידת שטח של סנטימטר רבוע תקרא בר (Bar) נשים לב ש- $1Bar = 10^4 \frac{N}{m^2}$. הכוח שמפעילה האטמוספרה בגובה פני הים נקרא לחץ אטמוספרי. מסתבר ש- $1ATM = 1.013Bar$, ולכן נחליף בין היחידות באופן חופשי. האמריקאים משתמשים ביחידות של Pounds per square inch (PSI). קל לחשב ש- $1PSI = 0.07Bar$.

כיוון הלחץ: לחץ הוא סקלר ואין לו כיוון. עם זאת, לכוח שפועל כתוצאה מהלחץ יש כיוון. הכיוון נקבע לפי כיוון המשטח, ולכן אין פה סתירה, ולכן על משטח מישורי לא פועל כוח שקול, כי פועל עליו כוח זהה משני צדדיו, בכוון הפוך.

גזים ונוזלים: בדיון הקודם הנחנו שאין כוחות בין החלקיקים, ושהם חופשיים לנוע כרצונם לכל כיוון ובכל מהירות. בנוזל ההנחה הזו כבר אינה נכונה, ויש אינטראקציה חזקה בין החלקיקים הגורמת לכך שאי אפשר לדחוס נוזל כלל. זהו ההבדל היחיד – כל חלקיק יכול לנוע בכל כיוון ובכל מהירות, בתנאי שכל החלקיקים מסביבו זזים אתו כך שהנפח הכולל נשמר. במוצק אין לחלקיקים אפשרות תנועה כלל (פרט לתנודות סביב נקודת המנוחה שלהם, כמובן). במילה זורם נתכוון לנוזל או לגז. בשלב זה של הקורס נדון בהידרוסטטיקה – זורמים במנוחה (כלומר גם גזים).

צפיפות החומר: תוגדר לפי המסה ליחידת נפח, ותסומן באות ρ. צפיפות החומר תלויה בסוג החומר ובשאלה האם הוא גז או נוזל. צפיפותו של גז תלויה בטמפרטורה ובלחץ, כפי שראינו. לדוגמה, צפיפות המים הנה גרם אחד לסנטימטר מעוקב, או טון למטר מעוקב.

משקל סגולי: הוא היחס בין צפיפות החומר לצפיפות המים. השם לא מוצלח, כי אין קשר למשקל.

לחץ בנוזל: נסתכל על נוזל בש"מ, ואז כל חלק בנוזל בש"מ. נגדיר תיבה אופקית שרירותית, ששטחה A וגובהה Δz. משקלה של התיבה הוא $W = \rho A\Delta z g$. מטעמי סימטרייה הכוחות האופקיים מבטלים זה את זה, ולכן נשאר רק עם הכוחות שפועלים על החלקים האופקיים. בסה"כ נקבל מדרישת שווי המשקל $P(z+\Delta z)A - P(z)A - \rho A\Delta z g = 0$. נחלק ב- Δz ונבצע את הגבול ונקבל $\frac{dP}{dz} = -\rho g$, מה שניתן לכתיבה גם כ- $P - P_0 = -\rho g(z - z_0)$, או $P = P_0 + \rho g h$ כאשר h הוא העומק (חוק פסקל), כלומר הלחץ תלוי אך ורק בעומק. 2 נקודות באותו עומק יהיו בלחץ שווה.

דוגמה: באיזה עומק במים הלחץ יהיה 2 אטמוספירות?

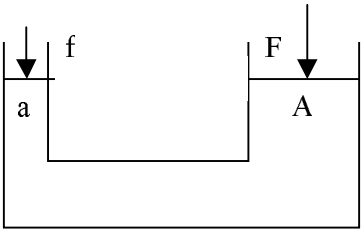
פתרון: נסמן לחץ אטמוספירי 1 ב- P_a, ואז $2P_a = P_a + \rho g h$, כלומר $h = \frac{P_a}{\rho g} = \frac{10^4 g}{10^3 g} = 10m$.

לחץ בגזים: הדיון שעשינו קודם זהה, ולכן נקבל שוב $\frac{dP}{dz} = -\rho g$. ההבדל הוא שלפי חוק הגזים הצפיפות תלויה גם היא בלחץ, כי $\rho = mn = m\frac{P}{k_B T}$. נסמן $\rho = \frac{\alpha}{g}P$, ואז קיבלנו משוואה דיפרנציאלית $\frac{dP}{dz} = -\alpha P$. הפתרון למשוואה הזו הוא פשוט $P = P_a e^{-\alpha z}$, ושוב הלחץ תלוי רק בגובה.

דוגמה: אם נתון שבגובה 5000 מטר הלחץ הוא חצי אטמוספירה, באיזה גובה הלחץ יהיה 2 אטמוספירות?

פתרון: נתון ש- $P_a e^{-5000\alpha} = \frac{1}{2}P_a$, ורוצים לדעת מתי $P_a e^{-h\alpha} = 2P_a$. נציב את הנתון ונקבל $2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5000}}$, ומכאן שהעומק הוא מינוס 5000 מטר, ואת זה אפשר למצוא רק במכרות עמוקים.

חוק כלים שלובים: ניקח שני כלים בעלי צורות שונות ונחבר אותם בצינור. אם נמלא אותם במים הם יתמלאו עד לאותו גובה בדיוק. במשך שנים זה נחשב לפרדוקס, שכן אם לאחד מהכלים שטח פנים גדול יותר, אז האוויר מפעיל שם כוח גדול יותר, ולכן חשבו שהצד הזה צריך לרדת. הטעות היא שגם המים מפעילים כוח, או שכבת המים שמתחת לפני המים, ולכן אין סתירה. מה שברור הוא שבצינור שמחבר בין הכלים הלחץ מוגדר היטב. כיוון שהלחץ תלוי רק בעומק הנקודה מתחת לפני הנוזל, אז גם העומק מתחת לפני הנוזל חייב להיות מוגדר היטב, ולכן הוא אותו עומק לעומת שפת המים בשני הכלים, כלומר פני המים בשני הכלים חייבים להיות באותו גובה.



מנוף הידראולי: הלחץ באותו גובה שווה, ולכן $\frac{F}{A} = \frac{f}{a}$. כלומר אם נפעיל כוח קטן בצד שמאל, הוא יוגדל בצד ימין. ככה פועלים כיסאות מתרוממים, בלמים הידראולים, בולמי זעזועים וכד'. ברור שאם נכנס גז לתוך המערכת אז המנוף (או הבלמים) מפסיקים לעבוד, מכיוון שהגדלת הלחץ תגרום לדחיסת הגז והצד השני לא יעלה.

חוק ארכימדס: נסתכל על גוף הנמצא בזורם כלשהו. אם הגוף היה מורכב מאותו חומר כמו הזורם, אז סך הכוחות הפועלים עליו היה 0 במישור XY, ומשקל הגוף כלפי מעלה בציר Z. כוח זה נקרא כוח העילוי. הכוח הפועל על משטח לא תלוי בחומר שממנו עשוי המשטח, ולכן על כל גוף יפעלו הכוחות הנ"ל. ארכימדס סיכם את זה בחוק: כל גוף מאבד ממשקלו כמשקל נפח הזורם שהוא דוחה. למשקל שנותר קוראים המשקל המדומה. מה המשקל המדומה של משהו שצף במים?

דוגמה: מפילים כדורסל וכדור באולינג ממגדל גבוה. נפח שני הכדורים הוא 0.004 מטר קוב. מסת כדור הסל היא חצי ק"ג ומסת כדור הבאולינג היא 5 ק"ג. צפיפות האוויר היא 1.3 ק"ג למטר קוב. מה יהיה המרחק האנכי בין הכדורים לאחר 5 שניות?

פתרון: עבור כל אחד מהכדורים $mg - F_u = ma$, כאשר $F_u = V\rho g$. לכן $a = g - \frac{V\rho g}{m}$,

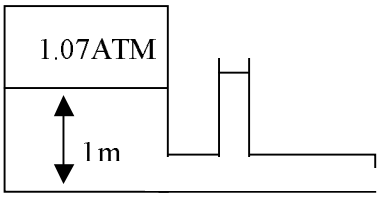
ולכן $\Delta a = V\rho g\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) = 0.092\frac{m}{\sec^2}$. לאחר 5 שניות ההפרש יהיה $\Delta x = 1.15m$. בשביל שזמן הנפילה יהיה לפחות 5 שניות צריך מגדל שגובהו 125 מטר. בתקופת ניוטון עוד לא היו כאלה מגדלים. מצד שני, הדיון הזה מתעלם מהחיכוך עם האוויר. כוח החיכוך תלוי בייחוד בצורה ובמהירות, ולכן על שני הגופים פועל אותו כוח חיכוך, וכמובן שזה משפיע יותר על תאוצת הקל מביניהם, ולכן הפרש התאוצות יהיה בפועל גדול יותר.

הידרודינמיקה: נסתכל בנוזלים שזורמים ללא מערבולות. זרימה כזו נקראת זרימה זרימנית, או למינרית. מה זה אומר? אם חלקיק נמצא בנקודה מסוימת, אז יש כיוון שאליו הוא ינוע משם, דבר שמגדיר את קווי הזרימה בנוזל. אם הזרימה היא למינרית, אז כל שני קווים כאלה לא חוצים זה את זה. כל זרימה אחרת נקראת זרימה מערבולתית, ובה שני קווים לפחות נפגשים זה עם זה, כלומר שיש נקודות שמהן אי אפשר לדעת לאן חלקיק ספציפי הולך, דבר הגורם לזרימה להיות כאוטית.

חוק הרציפות: נסתכל על צינור בעל רוחב משתנה, שבו זורם נוזל בזרימה למינרית, ונסתכל על נפח מסוים (שרירותי) של הנוזל. כיוון שנוזל לא יכול להידחס, החלק האחורי של הנפח שעליו הסתכלנו עובר בדיוק את אותו נפח שעובר החלק הקדמי. הנפח שעובר כל צד של הנפח שבחרנו הוא Av, כלומר קיבלנו את חוק הרציפות - $Av = const$ לאורך כל הזרימה.

חוק ברנולי: נסתכל על העבודה שמבוצעת כדי להעביר את אותו נפח נוזל לקטע הצינור הצר יותר. קל לראות שמה שקורה באופן מעשי, הוא שהחלק האחורי של הנוזל הופך להיות החלק הקדמי של הנוזל. בשאר חלקי הנוזל אין שינוי, ולכן שינוי האנרגיה היחיד קורה בשני החלקים האלה. נתעלם כרגע מהגרביטציה, ואז ההבדל היחיד באנרגיה הוא באנרגיה הקינטית. המסה של שני החלקים שווה, ולכן נקבל שהפרש האנרגיה הוא פשוט $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$. העבודה מופעלת על ידי הנוזל שמחוץ לנפח שבחרנו, והעבודה היא הכוח כפול האורך, כלומר $W = P_1A_1\Delta x_1 - P_2A_2\Delta x_2 = (P_1 - P_2)V$. מסת שני החלקים (הקדמי והאחורי) תלויה בנפח, כלומר $W = \frac{1}{2}\rho Vv_2^2 - \frac{1}{2}\rho Vv_1^2$. נשווה את שתי המשוואות ונקבל $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$. זה צריך להתלכד עם חוק פסקל במקרה שבו יש גרביטציה ואין מהירות, ולכן נוכל מיד לומר $P_1 + \rho gz_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gz_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$, או $P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 = const$, שהוא חוק ברנולי, שנרשם לפעמים במשוואה ביחידות אורך בלבד

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = const.$$



תרגיל: מי ים בצפיפות 1.03 גרם לסמ"ק נמצאים במיכל גדול, בגובה של 1 מטר. החור בקרקעית הכלי הוא בשטח של 9 סמ"ר, ושטח הצינור המוביל אליו 18 סמ"ר. מה קצב הספיקה של המים ומה גובה המים בצינור העומד?

פתרון: נשווה בין המים בתוך המיכל לבין המים לאחר שיצאו. נניח שהמים בתוך המיכל יורדים במהירות זניחה לעומת הקצב שבה הם נפלטים מלמטה, ואז לפי חוק ברנולי $\frac{P_1}{\rho g} + 1 = \frac{P_a}{\rho g} + \frac{v_a^2}{2g}$, ומכאן $v_a = 5.74\frac{m}{\sec}$ (כי $v_a^2 = 2\frac{P_1 - P_a}{\rho} + 2g = 2\frac{700g}{1030} + 2g$). הספיקה היא ליטרים לשנייה וידועה לנו המהירות. אם ידוע השטח נקבל נפח לשניה, שזה ליטרים לשניה - $Q = A_av_a = 5.16\frac{Liter}{\sec}$. נשתמש בנוסחת ברנולי עבור שפת המים בצינור העומד, c. $\frac{P_a}{\rho g} + \frac{v_a^2}{2g} = \frac{P_a}{\rho g} + h$, ומכאן $h = \frac{P_1 - P_a}{\rho g} + 1 = 1.67m$.

כוח עילוי של מטוס: חלקו התחתון של כנף של מטוס הוא שטוח, בעוד החלק העליון הוא קשתי. דבר זה אומר שבחלק העליון של הכנף האוויר צריך לעבור יותר מהר. לפי נוסחת ברנולי דבר זה אומר שהלחץ שם קטן יותר. דבר זה גורם לכך שהאוויר מפעיל כוח שקול כלפי מעלה, ואם המהירות מספיק גבוהה אז המטוס יכול להמריא. כל זה נכון בתנאי שהאוויר זורם על פני הכנף בצורה למינרית. אם לא, ומתחילות מערבולות מעל לכנף, אז המערבולות מפעילות כוח על הכנף כלפי מטה. אם המערבולות חזקות מדי, המטוס מתחיל ליפול (כמו כל גוף נורמלי). מצב זה נקרא הזדקרות, ומאוד קשה לצאת ממנו.