מכניקה לביולוגיה חישובית – שעור 5

תנע: ננסח מחדש את החוק השני של ניוטון - $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$. זהו למעשה הניסוח המקורי שכתב ניוטון, והוא קרא לגודל שבתוך הסוגריים התנע $\vec{p} = m\vec{V}$, ואז $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$. יחידות התנע הן ק"ג מטר לשניה, או ניוטון שניה. אבל למה בכלל צריך גם משהו כיווני? יש לנו אנרגיה, שהיא גודל סקלרי, אבל כיוון שאנחנו דנים בהשפעה של כוחות, אז ברור שהכוון חייב לשחק תפקיד.

דוגמה: קליע במסה של 10 גר' נורה במהירות 800 מטר לשניה. אם משך הזמן שבו מתרחש תהליך ההתפוצצות הוא 0.05 שניות, מהו כוח הרתע? מה התאוצה שהייתה מופעלת על אדם במסה 80 ק"ג שמחזיק את הרובה?

פתרון: $\Delta m\vec{V} = \int \vec{F}dt$, אז אם נניח שהכוח קבוע במהלך ההתפוצצות נקבל $m\vec{V} = \vec{F}\Delta t$, כלומר הכוח הוא 160 ניוטון. זה הכוח שפועל על הקליע. כוח הרתע הוא הכוח שהקליע מפעיל על הרובה, ולכן לפי החוק השלישי כיוונו בכוון ההפוך מכיוון המהירות של הקליע. התאוצה שכוח זה יפעיל על אדם במסה 80 ק"ג היא 2 מטר לשניה בריבוע.

שימור התנע: באילו תנאים נשמר התנע? נסתכל על 2 הניסוחים של החוק השני של ניוטון. לפי הניסוח הדיפרנציאלי קל לראות שאם אין כוחות חיצוניים שפועלים על הגוף אז התנע שלו נשמר. לפי הניסוח האינטגרלי אפשר לראות שאם מדובר בכוח שפועל בזמן ששואף ל-0 גם אז אין שינוי בתנע.

כוחות פנימיים: נניח שגוף 1 מפעיל כוח על גוף 2. לפי החוק השלישי גוף 2 מפעיל כוח הפוך על גוף 1. התנע של כל אחד מהגופים ישתנה, אבל התנע הכולל של שניהם ישמר (קל לראות לפי ההגדרה האינטגרלית). לכן, אם אנחנו מדברים על כוחות פנימיים במערכת אז הם לא יכולים לגרום לשינוי בתנע.

דוגמה: אם אותו אדם מהדוגמה הקודמת יורה ברובה בקצב של 1000 כדורים בדקה, מהו הכוח הממוצע שפועל עליו? באיזו זווית הוא צריך לעמוד בשביל לא ליפול, אם הירייה אופקית?

פתרון: השינוי בתנע במשך דקה הוא השינוי בתנע של קליע אחד כפול 1000. משך הזמן הוא 60 שניות, לכן $F = \frac{\Delta mV}{\Delta t} = \frac{8000}{60} = 133\frac{1}{3}N$. התאוצה שתפעל עליו כעת היא $a = \frac{F}{m} = 1\frac{2}{3}m/\sec^2$, לכן הכוח השקול הפועל על האדם הוא בכוון כך ש- $\tan\theta = \frac{g}{a} = 6$, כלומר בזוית של 80.5 מעלות מתחת לאופק, ולכן האדם צריך לעמוד בזוית 80.5 מעלות מעל לאופק.

התנגשויות: התנגשות קורה כאשר שני גופים מבצעים אי-זושהי אינטראקציה ביניהם הגורמת לשינוי המהירויות של הגופים. אנחנו נדון לרוב בהתנגשויות שמשך הזמן שלהם שואף ל-0. דבר זה אומר שהתנע בהתנגשות תמיד נשמר. נבחין בין 2 סוגי התנגשויות: 1) התנגשות אלסטית – זו התנגשות שיש בה שימור אנרגיה. 2) התנגשות פלסטית – התנגשות שלאחריה שני הגופים נעים ביחד.

טענה: התנגשות פלסטית לא יכולה להיות אלסטית.

הוכחה: נבחר מערכת צירים שבה אחת מהמסות במנוחה לפני ההתנגשות. אז מסה 1 מתנגשת במהירות V_1 במסה 2 ואח"כ הן נעות יחדיו במהירות V_2. נמצא מהי המהירות הסופית ומה איבוד האנרגיה. מתוך שימור התנע $m_1V_1 + m_2 0 = (m_1 + m_2)V_2$, ומכאן $V_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}V_1$. לפני ההתנגשות $E_{k1} = \frac{1}{2}m_1V_1^2$, ואחריה $E_{k2} = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}V_1^2$, לכן נקבל $\Delta E_k = \frac{1}{2}m_1V_1^2\frac{m_2}{m_1 + m_2}$. זה יכול להתאפס רק אם אחת מהמסות מתאפסת.

דוגמה: גוף במסה 2 ק"ג מתנגש ישירות בגוף נייח במסה 1 ק"ג. לפני ההתנגשות מהירות הגוף הראשון הייתה 3 מטר לשניה, ולאחר ההתנגשות מהירותו 1 מטר לשניה. מה מהירות הגוף השני לאחר ההתנגשות? האם זו התנגשות אלסטית? פלסטית?

<u>פתרון:</u> לפי חוק שימור התנע נוכל מיד לדעת מה מהירותה של המסה השניה. $V_3 = \frac{m_1}{m_2}(V_1 - V_2)$,
כלומר 4 מטר לשניה. ברור מתוך התוצאה שההתנגשות לא פלסטית. נבדוק את השינוי באנרגיה הקינטית כדי לראות אם ההתנגשות אלסטית. האנרגיה ההתחלתית היא $E_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = 9J$,
והאנרגיה הסופית היא $E_2 = \frac{1}{2}m_1V_2^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = 1+8 = 9J$, כלומר ההתנגשות אלסטית.

<u>דוגמה:</u> דיסקת הוקי A נעה על משטח קרח במהירות 24 מטר לשניה ופוגעת בדיסקה דומה B הנמצאת במנוחה. לאחר ההתנגשות A ניתזת בכוון של 30 מעלות מכוון תנועתה המקורי, ו-B נהדפת בזווית של 45 מעלות לכוון התנועה המקורי של A. מה מהירויות הדיסקות? איזו התנגשות זו?

<u>פתרון:</u> ידוע לנו התנע התחילי של המערכת - $\vec{p}_0 = (24m, 0)$. לאחר ההתנגשות התנע הוא
$(mV_A\cos 30^\circ, mV_A\sin 30^\circ) + (mV_B\cos 45^\circ, -mV_B\sin 45^\circ)$. כיוון שבמישור ההתנגשות אין כוחות נוספים התנע נשמר ולכן $V_A\cos 30^\circ + V_B\cos 45^\circ = 24$, ו- $V_A\sin 30^\circ - V_B\sin 45^\circ = 0$.
נחבר את המשוואות ונקבל $V_A(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ) = 24$, כלומר $V_A = 17.57m/\sec$, ומהצבה נקבל ש- $V_B = 12.42m/\sec$. שוב ברור שזו לא התנגשות פלסטית. האנרגיה הקינטית בהתחלה היא $E_1 = 288m\frac{J}{Kg}$, ובסוף $E_2 = 231.5m\frac{J}{Kg}$, ולכן זו גם לא התנגשות אלסטית.

<u>שינוי מסה:</u> כיוון שהתנע תלוי במסה, אז אם המסה משתנה מסיבה כלשהי זה משנה את המהירות.

<u>דוגמה:</u> ילד נוסע על עגלה חסרת חיכוך הנוסעת במהירות V_0. על העגלה יש שקי חול והילד שופך אותם בקצב של $\alpha\frac{Kg}{\sec}$. המסה ההתחלתית של העגלה, החול והילד היא M_0 והילד זורק את החול במהירות V_s לעומת העגלה. מהי מהירות העגלה כפונקציה של הזמן?

<u>פתרון:</u> נסתכל על המערכת בזמן t כלשהו ולפרק זמן קצר. בפרק זמן זה יש התנגשות בין חלק החול שהילד זורק לבין הילד והעגלה. התנע בהתחלה הוא $p_1 = (m(t) + \alpha\Delta t)V(t)$, ובסוף
$p_2 = m(t)V(t+\Delta t) + \alpha\Delta t(V(t) - V_s)$, ולכן $\Delta p = m(t)V(t+\Delta t) - m(t)V(t) - a\Delta tV_s$. אם נחלק בפרק הזמן ונשאיף אותו ל-0 נקבל $\frac{dp}{dt} = m(t)\frac{dV}{dt} - \alpha V_s$, ומכאן $(M_0 - \alpha t)\frac{dV}{dt} - \alpha V_s = 0$. נבצע את האינטגרציה ונקבל $V(t) = V_0 + V_s\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{M_0}\right)$.

<u>דיון:</u> משאית במסה 3000 ק"ג ומהירות 36 קמ"ש, או מכונית במסה 800 ק"ג ומהירות 90 קמ"ש. מה יותר מסוכן?

<u>סיכום</u>: נסכם את מה שלמדנו עד עכשיו בקורס.

- אם $\vec{r}(t)$ הוא מיקום חלקיק במערכת צירים כלשהי, אז $\vec{V}(t)=\dot{\vec{r}}(t)$, $\vec{a}(t)=\dot{\vec{V}}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)$.
באופן דומה $\vec{V}(t)=\vec{V}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(\tau)d\tau$, $\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{V}(\tau)d\tau$, ואם התאוצה קבועה אז $\vec{V}(t)=\vec{V}(t_0)+(t-t_0)\vec{a}$ ו- $\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+(t-t_0)\vec{V}(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\vec{a}$.
- המכפלה הסקלרית $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ מקיימת $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=ab\cos\theta$, ולכן היא שווה 0 אם הווקטורים ניצבים זה לזה.
- המכפלה הוקטורית $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b \end{vmatrix}$ מקיימת $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=ab\sin\theta$, ולכן היא מתאפסת אם הווקטורים באותו כיוון. כמו כן המכפלה הוקטורית ניצבת לכל אחד מהווקטורים המוכפלים.
- חוקי ניוטון:
  1. קיימות מערכות צירים אינרציאליות, שבהן לגופים מבודדים וקטור מהירות קבוע.
  2. השפעה של כוח על גוף היא $\vec{F}=m\vec{a}$.
  3. לכל כוח יש כוח תגובה שווה בגודלו והפוך בכוונו.
- בבעיות עם כוחות יש להפריד את המערכת לגופים השונים. לכל גוף יש לצייר את <u>כל</u> הכוחות הפועלים <u>עליו</u>. יש לבחור מערכת צירים ולרשום את החוק השני של ניוטון (מש' התנועה). לפעמים הגדרת המערכת מוסיפה אילוץ נוסף (אורך החוט קבוע, וכד').
- בחוט חסר מסה המתיחות קבועה לכל אורכו.
- בתנועה מעגלית הרכיב הרדיאלי של התאוצה הוא $F_r=-m\omega^2 r$, והמהירות $V=\omega r$. אם התנועה במהירות קבועה, אז קיים זמן מחזור T, ואז $\omega=\frac{2\pi}{T}$.
- יש 2 סוגי חיכוך – סטטי ודינמי – ושניהם כוחות תגובה. חיכוך סטטי יכול להגיע לערך מכסימלי $\mu_s N$ ומתנגד לתחילת תנועה. חיכוך דינמי הוא בעל גודל קבוע $\mu_d N$ ומתנגד לכוון התנועה.
- עבודה היא תרומת כוח F לאורך מסלול c מסוים. העבודה היא ההבדל באנרגיה הקינטית, אשר מוגדרת $E_k=\frac{1}{2}mV^2$.
- כוח משמר הוא כוח שעבודתו בין 2 נקודות לא תלויה במסלול. במקרה כזה נגדיר אנרגיה פוטנציאלית ביחס לנקודת יחוס $\vec{r}_0$, המקיימת $U(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, או $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$.
- האנרגיה המכנית היא סכום האנרגיה הקינטית וכל האנרגיות הפוטנציאליות בבעיה. עבודת שאר הכוחות היא השינוי באנרגיה המכנית.
- הספק הוא נגזרת העבודה לפי הזמן $P=\dot{W}$.
- תנע מוגדר לפי $\vec{p}=m\vec{V}$. לפי החוק השני של ניוטון $\vec{F}=\dot{\vec{p}}$. כוחות פנימיים לא משפיעים על התנע הכולל של המערכת. התנע נשמר כאשר אין כוחות חיצוניים, וכאשר הזמן שבו פועל הכוח הוא קטן.
- התנגשות היא אינטראקציה בין 2 גופים, שלאחריה 2 הגופים משנים את מהירותם. ישנן 2 סוגי התנגשויות מיוחדות – התנגשות פלסטית היא כזו שאחריה 2 הגופים נעים ביחד. התנגשות אלסטית היא כזו שמתקיים בה שימור אנרגיה. התנגשות פלסטית לעולם אינה אלסטית.