מכניקה לביולוגיה חישובית – שעור 2

הערה ליחידות: כדי לוודא שאין טעויות יחידות תוך כדי החישוב, מומלץ לכתוב את היחידות על כל משתנה בעל יחידות שהחלפתם אותו בערכו.
דבר נוסף הוא שינוי סדר גודל היחידות בעזרת הקידומות פיקו (p), ננו (n), מיקרו (μ), מילי (m), קילו (K), מגה (M), ג'יגה (G), טרה(T), העוברים מ-10 בחזקת (12-) ועד 10 בחזקת 12 בקפיצות של 3 . יש גם את סנטי (c), שהוא 10 בחזקת (2-).
קינמטיקה: הגדרנו את וקטורי המיקום, המהירות והתאוצה של גוף מסוים, וראינו את הקשרים ביניהם. הבעיה הכי פשוטה, ושהיא בעלת קשר לחיי היומיום היא בעיה של תאוצה קבועה. במקרה

כזה נקבל $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \int_0^t \vec{a}dt = \vec{V}_0 + \vec{a}t$,

ואז $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{V}(t)dt = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$.

על כדה"א קיים כוח משיכה קבוע כלפי מטה, שגודלו $g = 9.81 m/\sec^2 \approx 10 m/\sec^2$. למעשה, כוון תאוצת הכובד הוא זה שקובע למה אנחנו קוראים למטה. אפשר, לכן, לחלק את התנועה לשני חלקים – החלק בכוון כוח המשיכה, והחלק הניצב לכוח המשיכה. אם נבחר את ציר z בכוון למעלה נקבל
$z(t) = z_0 + V_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad y(t) = y_0 + V_{y0}t, \quad x(t) = x_0 + V_{x0}t$.
דוגמה: מטוס טס בגובה 490 מטר מעל פני הקרקע ובמהירות 324 קמ"ש. בזמן טיסה אופקית המטוס משחרר משא. א) כמה זמן ישהה המשא באוויר? ב) איזה מרחק אופקי עובר המשא עד הגיעו לקרקע? ג) מהי מהירות הפגיעה בקרקע ומה כוונה?
פתרון: א) תחילה צריך לבחור מערכת צירים. נבחר את המערכת כך שראשית הצירים בנקודת הזריקה, ציר z פונה כלפי מעלה, וציר x הוא בכוון הזריקה. עוד דבר שצריך לעשות הוא להעביר את כל הנתונים למערכת היחידות המתאימה, מה שאומר שמהירות הזריקה של המשא הוא
$324 \frac{km}{\sec} = 324 \frac{1000m}{3600\sec} = 90 \frac{m}{\sec}$. נציב במשוואה $x(t) = 90t$, $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$. אם כך, ניתן לרשום
הראשונה את התנאי שאומר שהמשא פוגע בקרקע, כלומר $-490 = -4.9t^2$, מה שנותן $t = 10\sec$.
ב) כדי למצוא את המרחק האופקי שעובר המשא נציב במשוואה השניה את הזמן שקיבלנו בסעיף א' ונקבל $x(t=10) = 900m$.
ג) נרשום את המהירויות בשני הצירים: $V_z(t) = -gt$, $V_x(t) = 90 m/\sec$. נציב את הזמן הנתון ונקבל $V_z(t=10) = -98 m/\sec$. אם כך, גודל המהירות הוא $V = \sqrt{(-98)^2 + 90^2} = 133 m/\sec$.
את הכוון נמצא לפי $\tan\theta = \frac{V_z}{V_x}$, ונקבל $\theta = -47.5^\circ$.
דוגמה: כדור גולף נזרק במהירות של 60 מטר לשניה ובזוית של 36.8 מעלות מעל האופק. הכדור נוחת בכיכר שנמצאת במרחק אופקי של 240 מטר. בכמה גבוהה הכיכר מנקודת הזריקה ומה מהירות הכדור ברגע הפגיעה?
פתרון: נבחר את ציר y בכוון למעלה, ואת ציר x בכוון תנועת הכדור - $V_x(t) = V_x(0) = 60\cos 36.8^\circ$,
$V_y(0) = 60\sin 36.8^\circ$. נמצא לאחר כמה זמן המרחק האופקי מגיע לנתון $240 = 48t \Rightarrow t = 5\sec$.
מכאן $y = V_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 180 - 122.5 = 57.5m$, ולכן $V_y(t) = V_y(0) - gt$.
לכן $V_y(t=5) = 36 - 49 = -13 m/\sec$. $V = \sqrt{13^2 + 48^2} = 49.7 m/\sec$.
כוחות: עד עכשיו דיברנו על תנועה בלי להתייחס לגורמיה. עכשיו נתייחס למה שגורם את התנועה, הכוחות, אבל בשלב ראשון נדבר על מצבים שבהם אין תנועה – מצבי שווי משקל. מה זה כוח? אין לנו

הגדרה מתמטית או פילוסופית טובה, אבל ניתן להגדיר כוח כמה שגורם לגוף הנע במהירות קבועה לשנות את מהירותו. באופן אינטואיטיבי כולנו יודעים מה זה כוח.
מה קורה כשמפעילים כוח על גוף? א) הוא זז, ב) הוא מסתובב, ג) הוא משנה את צורתו. הכוח הראשון שראינו, שהוא גם הכוח הקל ביותר להבנה, הוא כוח הכובד. הכוח שמפעיל כדור הארץ על כל גוף נקרא משקלו של הגוף. נשים לב שהמשקל אינו מסה. מסה נמדדת בקילוגרמים. מסת גוף לא משתנה מכוכב לכוכב – היא תכונה של החומר, אבל משקלו כן. לכוח שמפעיל כדה"א על גוף שמאסתו קילוגרם אחד נקרא קילוגרם-כוח (קג"כ). בהמשך נגדיר יחידה ב- MKS. אבל חוץ מכוח הכובד פועלים עלינו כל הזמן עוד המון כוחות – מהרצפה, מהאוויר, וכד'.
כוח הוא וקטור. אחת הדרכים הנוחות לדעת אם גודל הוא וקטור או סקלר היא לפי השאלה "האם יש לו גם גודל וגם כיוון?".
<u>שווי משקל:</u> מה קורה כשמפעילים על גוף יותר מכוח אחד? חייבים לבצע סכום ווקטורי של הכוחות. תוצאת הסכום הזה נקראת שקול הכוחות.
כאשר הגוף לא משנה את מהירותו, סיבובו וצורתו נאמר שהגוף נמצא בשווי משקל.

נסתכל בציור של גוף מישורי קשיח, שפועל עליו כוח $\vec{F}_1$. הגוף יזוז וגם יסתובב. נוכל למנוע את התנועה וגם את הסיבוב ע"י הוספת כוח שני. הכוח הזה חייב להיות שווה בגודלו והפוך בכוונו לכוח הראשון, אבל הוא גם חייב להיות על אותו קו פעולה. למעשה, אפשר לראות כל כוח כאילו הוא פועל על כול נקודה שהיא לאורך קו הפעולה שלו. אם במקום כוח שני נפעיל כוח שלישי ורביעי, אז שקול הכוחות של שני כוחות אלה חייב להיות זהה לכוח השני שהפעלנו על מנת שהגוף יהיה בש"מ, אבל גם נקודת מפגש קווי הפעולה שלהם חייב להיות על אותו קו פעולה כמו הכוח השני. אם כן,התנאי הראשון לשווי משקל, אומר שסכום הכוחות חייב להיות שווה ל-0, והתנאי השני הוא שקווי הפעולה של כל הכוחות ייפגשו בנקודה אחת (בעצם, מספיק שיהיו קבוצות של כוחות הפועלים על אותה נקודה וסכומם 0). ישנם 3 סוגי שווי משקל – יציב, אדיש ורופף. כאשר גוף בש"מ ונסיט אותו הסטה קלה מש"מ ייתכנו מצבים שבהם הכוחות יחזירו את הגוף למצב שווי המשקל – זהו ש"מ יציב. אם הכוחות מרחיקים מנקודת ש"מ זהו ש"מ רופף, ואם הנקודה החדשה גם היא נקודת ש"מ, אז זהו ש"מ אדיש. סר אייזק ניוטון ניסח את 3 החוקים שלו כבר בשנת 1686:
<u>החוק הראשון של ניוטון:</u> של גוף ממשיך בתנועה בקו ישר ובמהירות קבועה, אלא אם כן פועל עליו שקול כוחות המאלץ אותו לשנות את תנועתו. דבר זה תואם את הניתוח שראינו לעיל.
<u>החוק השלישי של ניוטון:</u> פעולותיהם של כל שני גופים זה על זה שוות תמיד ומכוונות בכוונים מנוגדים. כלומר כשאנחנו דוחפים את הקיר, הקיר דוחף אותנו בחזרה. זה ברור אם לובשים סקטים, או אם הרצפה חלקה.
<u>דוגמה:</u> גוף שמאסתו 3 ק"ג מונח על משטח אופקי. איזה כוח יש להפעיל עליו על מנת שיהיה בשווי משקל?
<u>פתרון:</u> כדה"א מפעיל על הגוף כוח של 3 קג"כ. הגוף מפעיל את אותו הכוח על המשטח. לפי החוק השלישי של ניוטון, השולחן מפעיל בתגובה על הגוף כוח כלפי מעלה שגודלו 3 קג"כ. לכן על הגוף פועל כוח שקול 0 והוא כבר בש"מ. כוח התגובה של המשטח נקרא כוח נורמלי (או נורמל) ומסומן באות N. בכוח הנורמלי תמיד יהיה ניצב למשטח, וזאת מטעמי סימטרייה.
<u>דוגמה:</u> גוף שמאסתו 3 ק"ג מונח על משטח משופע חסר חיכוך, המונח בשיפוע של 36.8 מעלות. מהו הכוח שצריך להפעיל על הגוף על מנת שיהיה בש"מ?
<u>פתרון:</u> במקרה זה יהיה לנו נוח יותר להסתכל על המערכת כך שציר X יתלכד עם המשטח. גם כאן מפעיל כדה"א כוח של 3 קג"כ על הגוף כלפי מטה, אבל "למטה" הוא מסובב עכשיו. הכוח שהגוף מפעיל על המשטח הוא $g\cos 36.8^\circ$, בכוון ניצב למשטח. לכן, המשטח מפעיל כוח תגובה שגודלו שווה וכוונו הפוך. בציר Y, אם כן, מתקיים שווי משקל. בציר X עלינו להוסיף כוח שווה בגודלו והפוך בכוונו למה שנותר, שהוא $g\sin 36.8^\circ$.
<u>דוגמה:</u> סולם, שאורכו 5 מטרים ומשקלו W הוא 40 קג"כ, נשען על קיר חלק כאשר הזווית בינו לבין הרצפה $\phi = 53.1^\circ$. מהם הכוחות הפועלים על הסולם, אם נתון שהוא בשווי משקל?
<u>פתרון:</u> את כוונו וגודלו של W אנחנו יודעים, ואנחנו יודעים שהוא פועל על מרכז הסולם. הקיר מפעיל על הסולם כוח נורמלי N, הניצב לקיר ופועל בנקודת המגע בין הסולם לקיר. הרצפה מפעילה כוח אחר, F, הפועל בנקודת המגע בין הרצפה לבין הסולם, כוונו פונה כלפי נקודת המפגש של W ו-N, וגודלו כזה שהוא שומר על שווי משקל. נשים לב שהזווית שבו פועל F, θ, שונה מזווית ההטיה של

הסולם. $\sum F_x = F\cos\theta - N = 0$, $\sum F_y = F\sin\theta - W = 0$. לפי גיאומטריה,

$\tan\theta = \frac{5\sin\phi}{2.5\cos\phi} = 2\tan\phi = 2\frac{2}{3}$, ומכאן ש-F שווה ל-42.72 קג"כ ולכן N שווה ל-15 קג"כ.

<u>חוטים:</u> כאשר חוט (או חבל) מתוח, הוא נמתח לקו ישר. כל כוח שמופעל על החוט מועבר על ידי החוט לקצה השני של החוט. באותה מידה, לפי החוק השלישי של ניוטון, החוט מפעיל בחזרה את אותם הכוחות בחזרה. אם כן, בחוט עצמו ניתן להגדיר מתיחות, שמסומנת T, ומועברת לכל קצה של החוט. כוון פעולת המתיחות הוא בכוון החוט. גם אם החוט מקופל סביב, למשל, גלגלת, קל לראות שאותה מתיחות עדיין תעבור מעבר לגלגלת.

<u>דוגמה:</u> גוף שמשקלו W קשור לחוט, הקשור בנקודה O לשני חוטים נוספים. שני החוטים קשורים לתקרה בזוויות שונות. מהי המתיחות בשלושת החוטים?

<u>פתרון:</u> הכוחות הפועלים על הגוף הם רק W ומתיחות החוט, לכן $T_1 = W$. כעת נדון בכוחות הפועלים על הנקודה O. בציר Y נקבל $T_3\sin\theta_3 + T_2\sin\theta_2 = T_1$, ובציר X $T_3\cos\theta_3 = T_2\cos\theta_2$.

פתרון מערכת המשוואות נותן $T_2 = W\frac{\cos\theta_3}{\sin(\theta_2+\theta_3)}$, $T_3 = W\frac{\cos\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_3)}$.

<u>מומנט של כוח:</u> לפעמים אי אפשר לדבר על נקודת המפגש של 2 קווי פעולה של 2 כוחות, למשל כאשר הקווים האלה מקבילים. נסתכל מה קורה לגוף במקרה כזה. ברור שכל אחד מהכוחות בעצמו יגרום לסיבוב. נניח (רק לשם הדיון) שיש ציר קבוע שסביבו הגוף יכול להסתובב. עד כמה משפיע הכוח על הסיבוב סביב הציר? בשביל לענות על זה נסתכל במקרה שאנחנו כבר כן מכירים – קווי פעולה שאינם מקבילים. 1) לכל קו פעולה יש מרחק מהציר, שנסמן אותו ב-r. 2) בשביל שלא יהיה סיבוב סביב הציר, נדרוש שהציר יהיה על קו הפעולה של שקול הכוחות. כלומר, $F_1\sin\theta_1 = F_2\sin\theta_2$ וגם $\frac{r_1}{\sin\theta_1} = \frac{r_2}{\sin\theta_2}$. מכאן נקבל $F_1 r_1 = F_2 r_2$. זה לא מספיק, כי למשל $\vec{F}_3 = -\vec{F}_2$ גם מקיים את המשוואות, אבל לא גורם לאותה תוצאה. לכן נגדיר מכפלה נוספת בין וקטורים – המכפלה הוקטורית. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$. אם נבחר את ציר X להיות בכוון הוקטור $\vec{a}$ ואת ציר Y כך שהוקטור $\vec{b}$ במישור XY, אז קל לראות שמתקיים $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta$. הכיוון של המכפלה הוקטורית ניצב לשני הוקטורים המוכפלים וכיוונו נקבע לפי כלל יד ימין. כעת נוכל להגדיר את המומנט של כוח על ציר מסוים - $\vec{M} = \vec{F}\times\vec{r}$, כאשר $\vec{r}$ הוא הוקטור מהציר לנקודה שבה פועל הכוח. התנאי לכך שהגוף לא יסתובב הוא, לכן, שסכום המומנטים הוא 0. זהו תנאי שניתן להכיל אותו גם על כוחות עם קווי פעולה מקבילים או מצטלבים. נפתור בשיטה זו מחדש את בעיית הסולם על הקיר החלק.

<u>פתרון:</u> ניתן לבחור את הציר שסביבו אין סיבוב היכן שנרצה, אז נבחר את נקודת המגע של הסולם עם הרצפה. נקבל שהתנאי הוא $(0,-W)\times(1.5,2) + (-F_1,0)\times(3,4) = 0$, כלומר

$(0,0,1.5W) + (0,0,-4F_1) = 0$. מכאן מיידית מתקבל ש- $F_1 = \frac{3}{8}W$, ומתוך כך ששקול הכוחות צריך להיות 0 נקבל את הפתרון כולו.

<u>השקול של כוחות מקבילים:</u> עבור כל ציר שנבחר המומנט של הכוח השקול צריך להיות שווה לסכום המומנטים. ניקח מערכת צירים שבה ציר Y מקביל לכוחות, נקבע את ראשית הצירים בנקודה כלשהי, נסמן את הוקטור השקול ב- $\vec{R}$, ואת קואורדינטת קו הפעולה השקול ב- $\bar{x}$. נקבל ש- המומנט השקול מקיים $\bar{x}R = \sum x_i F_i$, כלומר $\bar{x} = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}$.

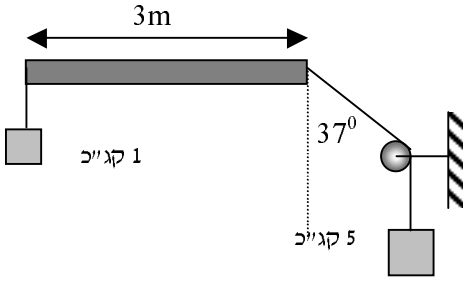
<u>מרכז המסה:</u> כאשר כוח המשיכה פועל על גוף מסוים הוא פועל על כל חלק שבו. מהו הכוח השקול ואיפה הוא פועל? ניתן לחלק את הגוף לחלקים קטנים, שלכל אחד משקל משלו. כוון הפעולה של כוח המשיכה על כל חלק הוא כלפי מרכז כדה"א, אבל בקירוב טוב (מאוד) הכוחות מקבילים. לפי מה שראינו, קיימת קואורדינטת X שניתן להתייחס אליה כאילו שם פועל כוח המשיכה. אם נסובב את הגוף (אבל לא את כל הבעיה) ב-90 מעלות נקבל קואורדינטת Y ששם פועל כוח המשיכה. בצורה דומה קיימת גם קואורדינטת Z כזו. הקואורדינטות האלה נקראות מרכז המסה של הגוף. מרכז המסה תלוי בגיאומטריה של הגוף ובחלוקת המשקל עליו.

<u>דוגמה:</u> על קצהו השמאלי של מוט אחיד באורך 3 מטר ובמשקל 40 קג"כ מניחים קופסה שרוחבה 0.5 מטר, גובהה 0.25 מטר ומשקלה 20 קג"כ. הקופסה מונחת כך שקצותיהם של המוט והקופסה מתלכדים. מהי קואורדינטת X של מרכז המסה המשותפת בשתי הצורות השונות שבהן ניתן להניח את הקופסה?

<u>פתרון:</u> נקבע את ראשית הצירים בקצהו השמאלי של המוט. קואורדינטת מרכז המסה של המוט היא ב $x=1.5$ מטר. קואורדינטת מרכז המסה של הקופסה היא ב- $x=0.25$ מטר או ב- $x=0.125$ מטר.

קואורדינטת מרכז המסה המשותפת תהיה ב- $\bar{x} = \frac{0.25 \cdot 20 + 1.5 \cdot 40}{20 + 40} = \frac{65}{60} = 1\frac{1}{12} m$ או בצורה דומה $\bar{x} = 1\frac{1}{24} m$.

<u>שאלה לדיון:</u> האם מרכז המסה של גוף יכול להיות מחוץ למסה? איך אפשר לבדוק באופן ניסיוני איפה נמצא מרכז המסה של גוף?



<u>שאלת תרגול:</u> על המוט שבציור דרוש להפעיל כוח יחיד שיחזיקו בש"מ. את משקל המוט אפשר להזניח. מהו הכוח שצריך להפעיל והיכן יש להפעילו?

<u>פתרון:</u> תחילה נחשב מהם הכוחות הפועלים על המוט. כל אחת מהמשקולות בנפרד נמצאת בשווי משקל ולכן הכוחות ידועים. מתוך כך ששקול הכוחות חייב להיות שווה ל-0 ניתן לדעת את גודלו של הכוח, ונקבל $\vec{F} = (3,5)$ קג"כ. כעת נבחר את הציר להיות בקצה הימני של המוט, ונחשב איפה צריך להפעיל את הכוח כדי שסכום המומנטים יהיה שווה ל-0. נסמן ב- x את מרחק נקודת פעולת הכוח מהקצה הימני של המוט, ואז $(-3,0)\times(0,-1)+(-x,0)\times(3,5)=0$, כלומר $x=60$ ס"מ.