77304 - תרגיל 7

1 ביולי 2003

1 חוק פאראדיי

1.1 כוח אלקטרו-מניע

כוח אלקטרו-מניע (כא"מ) הוא עבודה ליחידת מטען לאורך מסלול סגור

$$V = \frac{W}{q} = \frac{1}{q}\int_{closed\,loop} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

באופן כללי על מטען יכול לפעול כוח חשמלי $q\vec{E}$ וכוח מגנטי $q\vec{v} \times \vec{B}$ לכן

$$V = \int_{closed\,loop} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

במעגל חשמלי הבטרייה משקיעה עבודה כדי להניע את המטענים במעגל לכן מתח בבטרייה שווה לכא"מ. נהוג לסמן את הכא"מ גם באות E.

1.2 שטף מגנטי

שטף מגנטי כמו השטף החשמלי מוגדר להיות אינטגרציה לאורך משטח של אלמטנט השדה המגנטי המאונך למשטח

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

יחידות השטף המגנטי

$$[\Phi] = Tesla \cdot m^2 = Weber = Wb$$

1.3 חוק פאראדיי

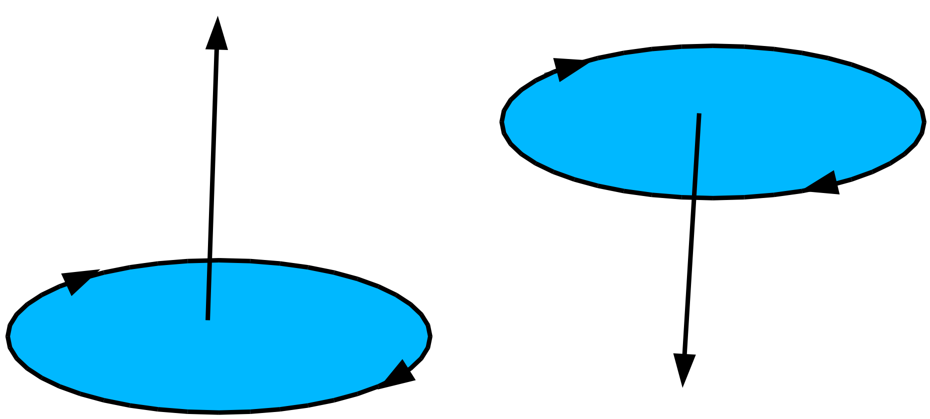
שטף מגנטי דרך משטח מסויים המשתנה בזמן, משרה כא״מ על שפת המשטח. גודל הכא״מ הוא כמידת השתנות השטף:

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

הערה: השטף המגנטי יכול להשתנות בשני אופנים: (1) ע״י שינוי גודל או כיוון השדה המגנטי; (2) ע״י שינוי השטח דרכו עוברים קווי השדה. הדבר המיוחד הוא שהכא״מ המושרה נוצר כתוצאה משני אפקטים פיסיקלים שונים עבור שני האופנים השונים וניתן במקרה לאחד אותם לנוסחה אחת. המקרה הראשון קשור בכך ששדה מגנטי משתנה משרה שדה חשמלי. המקרה השני (שטח משתנה) קשור פשוט בכוח לורנץ שמפעיל השדה המגנטי על המטענים בשפת המשטח, לכן ברב השאלות ניתן לפתור גם ללא שימוש בחוק פאראדיי, אלא חישוב כוח לורנץ וחישוב האינגטרל של העבודה לאורך המסלול.

1.4 חוק לנץ

סימן המינוס בחוק פאראדיי קשור במוסכמה לגבי קביעת הסימן החיובי של המסלול. עבור שטח המשטח יש שני כיוונים הפוכים המאונכים לו (למעלה או למטה), וכן עבור שפת המשטח יש שני כיוונים ללכת לאורכו (עם כיוון השעון ונגד כיוון השעון). בין שני הגדלים השטח והשפה יש תלות לכן ניתן לקבוע שרירותית את הכיוון החיובי של אחד מהם והשני נקבע בהתאם. המוסכמה הינה חוק יד ימין: נניח בחרנו שרירותית את אחד הכיוונים המאונכים לשטח המשטח ככיוון החיובי, אזי כאשר אגודל ימין מצביעה בכיוון זה האצבעות מצביעות על הכיוון החיובי של שפת המשטח.



עבור כא״מ יש שני כיוונים במסלול לבצע את האינטגרל $\int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ כאשר כיוון אחד ייתן את אותה תוצאה של הכיוון השני רק בסימן הפוך. לכן המינוס במשוואה אומר שאם האגודל מצביע על הכיוון של השדה המגנטי אז אם השטף גדל (נגזרת חיובית) הכיוון החיובי של הכא״מ הוא נגד כיוון האצבעות ואם השטף קטן (נגזרת שלילית) הכיוון החיובי של הכא״מ הוא עם כיוון האצבעות.

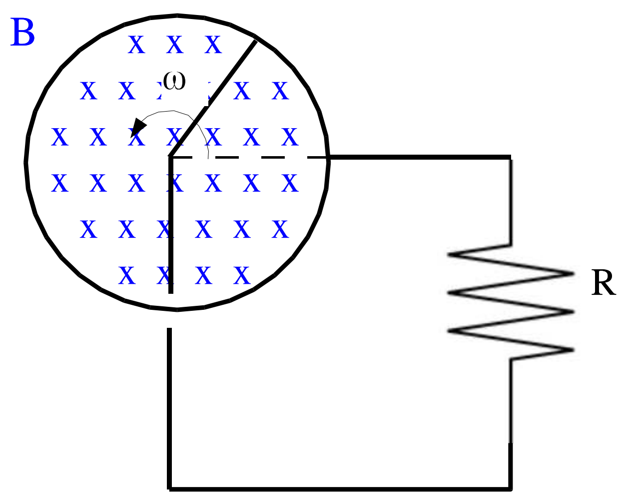
כאשר המסלול מהווה מעגל חשמלי סגור אז הכיוון החיובי של הכא"מ הוא הכיוון בו יזרום הזרם המושרה במעגל. לכן את ההסבר המסובך הנ"ל ניתן להחליף בתסבוכת אחרת והיא חוק לנץ:

כיוון הזרם המושרה במעגל הוא כזה המתנגד למגמת שינוי השטף המגנטי

זרם כאמור יוצר שדה מגנטי לכן הכוונה היא שאם השטף המגנטי המקורי גדל אז הוא ישרה זרם בכיוון כך שיוצר שדה מגנטי מנוגד ויקטין את השטף. אם השטף המגנטי קטן אז הוא ישרה זרם בכיוון כך שיוצר שדה מגנטי בכיוון השדה המקורי לכן יגדיל את השטף. הכלל עבור זרם בלולאה סגורה הוא שאצבעות יד ימין בכיוון הזרם אז האגודל בכיוון השדה שנוצר מהזרם.

1.5 דוגמא

מוט באורך l מסתובב סביב קצה שלו במהירות זוויתית קבועה ω נגד כיוון השעון וה-קצה השני מחליק על מסילה מעגלית חסרת התנגדות ללא חיכוך. בתוך תחום המסילה שורר שדה מגנטי אחיד B אל תוך הדף.



א. מה המתח בין קצות המוט?

נקבע ציר ייחוס, כך שבכל זמן t המוט נמצא בזווית $\theta(t)$ ביחס לציר זה. הואיל והשדה קבוע ותמיד מאונך למשטח אזי השטף הוא מכפלת השדה בשטח

$$\Phi(t) = BS(t) = B\frac{1}{2}\theta l^2$$

הכא"מ לפי חוק פאראדיי (נחשב ערך מוחלט)

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}Bl^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}Bl^2\omega$$

על ציר הייחוס ועל המסילה המעגלית לא פועל כוח ולכן האינטגרל על קטעים אלו מתאפס לכן התרומה לאינטגרל על כל הלולאה מגיע רק מאינטגרציה על המוט. לכן המתח בין קצוות המוט שווה לכא"מ. לפי הבחירה שלנו של השטח אז השטף דרכו גדל לכן לו היה זרם במעגל לפי חוק לנץ הוא היה מקטין את השדה ולכן זורם נגד כיוון השעון וזה אומר שהכיוון החיובי של המתח הוא מהמסילה אל ציר הסיבוב (אם נסתכל על המוט כעל בטרייה אז הקוטב החיובי שלה הוא בציר הסיבוב).

ניתן לחשב גם ישירות מכוח לורנץ. מטען q הנמצא על המוט במרחק r מציר הסיבוב נע מאונך לשדה במהירות משיקית $v(r) = \omega r$. לכן הכוח הפועל עליו הוא

$$F(r) = qv(r)B = qB\omega r$$

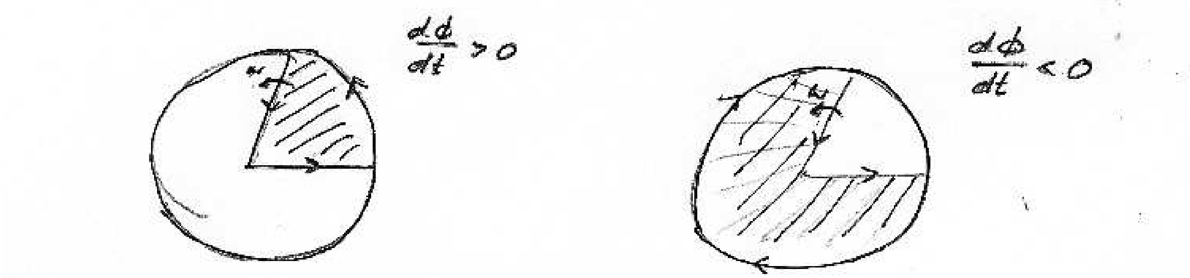
כיוון הכוח הוא לאורך המוט לכיוון מן המסילה אל ציר הסיבוב. העבודה של הכוח לאורך המוט הוא

$$W = \int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = \int F dr = \int_0^l qB\omega r dr = qB\omega \frac{1}{2} r^2 \mid_0^l = \frac{1}{2} qB\omega l^2$$

המתח לכן הוא

$$V = \frac{W}{q} = \frac{1}{2} B\omega l^2$$

הערה: יכולנו לבחור את השטח המוגדר ע"י הזווית לציר המשלימה לזו שבחרנו. בצורה זו השטף הוא $\Phi = \frac{1}{2} B \left(2\pi - \theta\right) l^2$ ובגזירה היה מתקבל אותו הגודל. במקרה זה השטף דווקא קטן לכן לפי חוק לנץ הזרימה היא עם כיוון השעון וזה נותן את אותו הכיוון על המוט.



הערה: שטח של גזרה $S(\theta) = \frac{1}{2}\theta l^2$ היא נוסחה גיאומטרית שצריך לזכור. אם לא זוכרים נוסחה זו אפשר או לזכור ששטח מעגל שלם הוא $S(2\pi) = \pi l^2 = \frac{1}{2} 2\pi l^2$ ולהסיק את הנוסחה עבור זווית כללית $\theta \neq 2\pi$. או לזכור שאורך קשת ברדיוס r הוא $r\theta$ ולכן השטח הוא סכום כל הקשתות מ-0 ועד l כלומר $S(\theta) = \int_0^l \theta r dr$.

ב. נגד R מחובר בקצה אחד למסילה ובקצה אחר לציר סיבוב המוט. מהו הכוח הפועל על המוט?

הנגד גורם לסגירת מעגל חשמלי ולכן יש זרם

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Bl^2\omega}{2R}$$

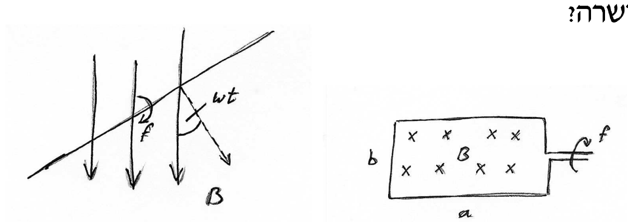
השדה המגנטי B לכן יפעיל כוח על המוט

$$F = IlB = \frac{B^2l^3\omega}{2R}$$

כיוון המכפלה $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ הוא בכיוון הפוך למהירות המשיקית של המוט. זה מסתדר עם ההגיון שחוק לנץ מבטא אינרציה של המערכת.

1.6 דוגמא

לולאה מלבנית $a \times b$ מסתובבת בתדירות f בתוך שדה מגנטי אחיד B מהו הכא"מ המושרה?



בכל רגע השדה נמצא בזוית $\theta(t)$ לאנך של המשטח של הלולאה. הואיל והשדה קבוע אז השטף בכל זמן הינו

$$\Phi(t) = B\cos\theta(t)S = Bab\cos\theta(t)$$

מן התדירות מוצאים את המהירות הזוויתית

$$\theta(t) = \omega t = 2\pi ft$$

לפי חוק פאראדיי

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}Bab\sin\theta = -2\pi fBab\sin 2\pi ft$$

1.7 השראה עצמית

רכיב במעגל הזורם בו זרם יוצר שדה מגנטי. אם הזרם משתנה בזמן אזי גם השדה שהוא יוצר ולכן הוא משרה כא"מ המתנגד לכיוון הזרם המקורי. הואיל והשדה הנוצר פרופורציונלי לזרם והשטף פרופורציונלי לשדה אזי הכא"מ המושרה פרופורציונלי לנגזרת הזרם. קבוע הפרופורציה נקרא השראות עצמית והוא תכונה של הרכיב החשמלי. רכיב במעגל כזה נקרא משרן או סליל.

$$V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

במשרן בו זורם זרם I יש אנרגיה

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

1.8 מעגל RL

נתבונן במעגל עם בטרייה נגד וסליל. בסליל מושרה כא"מ המתנגד לבטרייה לכן זה כמו חיבור שתי בטריות הפוך. לכן ניתן לרשום את חוק אוהם

$$V + V_L = IR$$

$$V - L\frac{dI}{dt} = IR$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית ב-I

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}$$

כאשר המפסק במצב 1 עוד לא זורם זרם במעגל כלומר צריך להתקיים $I(t=0) = 0$

פתרון של המשוואה איפוא

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

מציבים ובודקים שזהו אכן פתרון של המשוואה. רואים כי הוא מקיים את התנאי $I(0) = 0$. בזמן אפס אין זרם לכן כל המתח על הסליל (הסליל מהווה נתק). בזמן ארוך

מאוד (זמן אינסופי) הזרם מגיע לערך קבוע לכן המתח על הסליל הוא אפס (הסליל מהווה קצר).

כעת כאשר מעבירים את המפסק למצב 2 אז הזרם ההתחלתי הוא V/R ולכן הפתרון כעת צריך לקיים $I(0)=\frac{V}{R}$. הפתרון הוא

$$I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

1.9 דוגמא

נתון המעגל הבא:

fig/bio5e.eps not found!

א. מה הזרם על הנגדים R_1 ו-R_2 ברגע חיבור המפסק?

fig/bio5f.eps not found!

בזמן החיבור הסליל מהווה נתק ולכן דרך נגד R_3 לא זורם זרם. כלומר יש לנו שני נגדים מחוברים בטור

$$I_1=I_2=\frac{V}{R_1+R_2}$$

ב. מה הזרם על הנגדים R_1 ו-R_2 אחרי זמן ארוך מאוד?

אחרי זמן ארוך הסליל מהווה קצר ואפשר להתעלם ממנו. לכן יש את נגדים R_2 ו-R_3 מחוברים במקביל, ויחד מחוברים בטור אל R_1. ההתנגדות השקולה היא

$$R=R_1+\frac{R_1R_2}{R_1+R_3}$$

הזרמים הם

$$I_1=\frac{V}{R} \qquad I_2=\frac{V-I_1R_1}{R_2}$$

ג. מה האנרגיה בסליל אחרי זמן ארוך מאוד?

הזרם על נגד R_3 הוא

$$I_3=\frac{V-I_1R_1}{R_3}$$

הסליל נמצא אל אותו ענף (מחובר בטור) לכן זה הזרם העובר דרכו לכן האנרגיה היא

$$U = \frac{1}{2}LI_3^2$$