

בחינה לדוגמא - פתרונות

שלום לכולם,

מצורף כאן הפתרון המוצע שלנו לבחינה לדוגמא. לדעתנו, מעבר על השאלות והבנה של הפתרונות מהווים הכנה טובה מאוד לבחינה. אנו מקווים שהתרשמתם מאופי השאלות ומהמבנה הטיפוסי שלהם.

נשמח לקבל כל שאלה או הערה, ובוודאי הצעות לתיקון אם מצאתם שגיאה כלשהיא (אנחנו מקווים מאוד שאין שגיאות, אבל אם מצאתם תודיעו מהר ונתקן).

בהצלחה לכולכם!

תיקונים:

(19.7) **בשאלה 6, סעיף ב':** היה חסר פקטור 4 (שטח של כדור הוא $4\pi r^2$). ראו בתוצאה המתוקנת.

(19.7) **בשאלה 4, סעיף ד':** הייתה טעות טיפוגרפית – צריך להיות $(1-e^{-1})$ שלב אחד לפני הסוף. התוצאה הסופית שמופיעה נכונה.

דבורה ודיפול

א. כזכור, מומנט הדיפול מוגדר כמכפלת המטען האופייני של הדיפול במרחק בין שני המטענים, והכיוון הוא מהמטען השלילי אל החיובי. במקרה שלנו $q=10^{-8}\text{C}$, $d=0.2\text{m}$ והכיוון הוא $+x$, שאותו אנו מסמנים עם וקטור היחידה $\hat{i}$. לכן מומנט הדיפול הוא

$$p = q\vec{d} = 10^{-8} \cdot 0.2\hat{i} = 2 \times 10^{-9}\hat{i} \text{ C}\cdot\text{m}$$

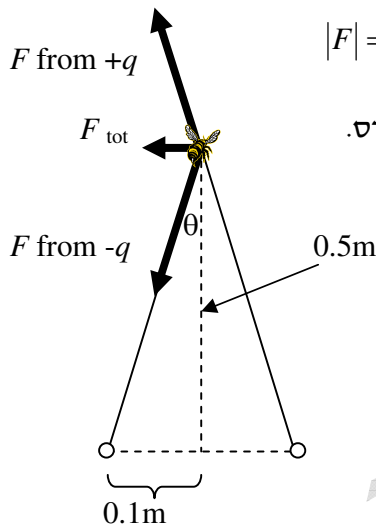
ב. האנרגיה החשמלית הפוטנציאלית של הדיפול היא זו שנדרשה להביא את שני המטענים מאינסוף למרחק d ביניהם. יש רק שני מטענים ולכן התוצאה טריוויאלית (כמו לשים קודם את מטען אחד, ואז לקרב אליו את המטען השני):

$$U = k \frac{q_1 q_2}{d} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-8} \cdot (-10^{-8})}{0.2} = -4.5 \times 10^{-6} \text{ Joule}$$

ג. מאחר שהערך המוחלט של שני המטענים שווה והמרחק שלהם לדבורה שווה, ברור שעוצמת הכוח שמפעיל כל אחד מהם על הדבורה שווה, וערכה הוא

$$|F| = k \frac{|q|q_{\text{bee}}}{D^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-8} \cdot 10^{-10}}{(0.1^2 + 0.5^2)} = 3.46 \times 10^{-8} \text{ N}$$

כאשר את המרחק D בין המטענים לדבורה מוצאנו בעזרת משפט פיתגורס.



כדי למצוא את הכוח השקול ואת כיוונו כדאי להתבונן בפעולה של הכוחות משני המטענים – המטען החיובי מפעיל כוח דוחה (כלומר, למעלה ושמאלה) ואילו המטען השלילי מפעיל כוח מושך (למטה ושמאלה). מאחר שלכוחות עוצמה שווה ברור שהרכיב למעלה מהכוח הראשון והרכיב למטה מהכוח השני שווים בעוצמתם והפוכים בכיוונם, ולכן מתקזזים. לעומת זאת הכוחות שמאלה שווים בעוצמתם ותורמים בכיוון זהה. לכן, אם נסמן ב- F_L את הרכיב שמאלה של כל אחד מהכוחות, הכוח השקול, F_{tot} , הוא פשוט $2F_L$. עוצמת הכוח היא, לכן:

$$F_{\text{tot}} = 2F_L = 2|F \times \sin \theta| = 2k \frac{|q|q_{\text{bee}}}{D^2} \sin \theta = 2 \times \left[9 \times 10^9 \frac{10^{-8} \cdot 10^{-10}}{(0.1^2 + 0.5^2)} \right] \times \sin \left(\arctan \left(\frac{0.1}{0.5} \right) \right)$$

כאשר θ היא הזווית המסומנת בציור. מהנתונים ברור שהיא מקיימת $\tan(\theta)=0.1/0.5$, והרכיב של הכוח בכיוון שמאלה הוא $F \times \sin(\theta)$. התוצאה המספרית הסופית שמתקבלת היא $F_{\text{tot}}=1.36 \times 10^{-8}\text{N}$. לעניין הכיוון – הכוח הוא שמאלה, כלומר בכיוון $-x$.

התשובה המלאה לכוח על הדבורה היא, אם כן:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = -1.36 \times 10^{-8} \hat{i} \text{ N}$$

ד. קל להתרשם (ואף דנו בכך בכיתה) שאם כיוון הדיפול הוא $+x$, הרי שלכל אורך ציר ה- y השדה שיוצר הדיפול החשמלי הוא בכיוון $-x$ (הנקודה הספציפית שבה נמצאה הדבורה בסעיף ג' איננה מיוחדת). לכן בכל מקום על ציר ה- y , תנועה במקביל לציר ה- y היא ניצבת לכוח שמפעיל הדיפול. ומאחר שעבודה היא מכפלה סקאלארית של הכוח וכיוון התנועה, **כוח שניצב לכיוון התנועה עושה אפס עבודה.**

את העובדה שהכוח החשמלי עושה אפס עבודה אנו מבינים גם לפי הפוטנציאל החשמלי. ברור, שלכל אורך ציר ה- y הפוטנציאל החשמלי מהדיפול הוא אפס (יש מרחק שווה משני מטענים שווים בגודלם והפוכים בסימנם). כלומר, הדבורה איננה משנה את הפוטנציאל החשמלי שלה לכל אורך התנועה על ציר ה- y . מאחר שעבודה סופית (שאיננה אפס) של השדה החשמלי מתבטאת בשינוי של הפוטנציאל החשמלי, הרי שכשהפוטנציאל איננו משתנה, נקל להבין שהשדה החשמלי לא עשה עבודה.

2. זרם בפירמידה מוליכה

א. ההתנגדות הכוללת של עצם בעל התנגדות סגולית ρ , אורך L ושטח פנים A היא, כזכור, $R = \rho L/A$. נציב את המספרים ונקבל (זכרו ששטח של ריבוע הוא אורך הצלע שלו בריבוע):

$$R = \frac{\rho \times h}{a^2} = \frac{1 \times 0.4}{0.1^2} = 40 \Omega$$

ב. **ההתנגדות תקטן, כמוכן.** בפירמידה יש שטח הולך וגדל יחסית לתיבה, בעוד שהאורך וההתנגדות הסגולית אינם משתנים. אפשר לחשוב על התיבה כאוסף של "פרוסות" צמודות זו לזו – מחוברות בטור – שלכולן שטח a^2 ויחד יש להן אורך h . בפירמידה המצב דומה, אך הפרוסות הולכות וגדלות בשטחן, ולכן יש להן התנגדות הולכת וקטנה, שיחד מגיעה להתנגדות קטנה מזו של התיבה.

ג. ברור שכאן צריך לעשות אינטגרציה לאורך הפירמידה. בתרגיל האמצע הייתה לכם בעייה דומה, ושם ההתנגדות הסגולית השתנתה לאורך המוליך; כאן השטח הוא שמשתנה לאורך המוליך. במילים אחרות, במקום x בתוך הפירמידה לקטע בעובי dx יש התנגדות של

$$dR(x) = \rho \frac{dx}{A(x)} = \rho \frac{dx}{(d(x))^2} = \rho \frac{dx}{\left(a + (b-a)\frac{x}{h}\right)^2}$$

שימו לב שבפיתוח כאן dx הוא אינטרוול קטן ב- x ואילו $d(x)$ הוא אורך הצלע של הריבוע בחתך של הפירמידה. למרות הסימון הדומה, נא לא להתבלבל.

זהו – צריך לעשות אינטגרציה על הביטוי האחרון שקיבלנו מ- $x=0$ ל- $x=h$. נציב כבר את המספרים $a=0.1$, $b=0.5$, $h=0.4$ (כולם במטרים) והנה:

$$R = \int_0^h \frac{\rho dx}{\left(a + (b-a)\frac{x}{h}\right)^2} = \int_0^{0.4} \frac{1 \cdot dx}{\left(0.1 + (0.5-0.1)\frac{x}{0.4}\right)^2} = \int_0^{0.4} \frac{dx}{(0.1+x)^2}$$

האינטגרל הזה לא קשה. מחליפים משתנה ל- $z=x+0.1$, כך ש- $dz=dx$, והנה יוצא

$$R = \int_{0.1}^{0.5} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} \Big|_{0.1}^{0.5} = -\frac{1}{0.5} - \left(-\frac{1}{0.1}\right) = -2 + 10 = 8 \Omega$$

אכן, זה פחות מאשר ההתנגדות של התיבה שמצאנו בסעיף א'.

ד. כזכור, שטף השדה החשמלי דרך משטח הוא סיכום (אינטגרל) על פני כל המשטח של המכפלה הסקאלארית של השדה עם הכיוון הניצב למשטח

$$\Phi_{\text{surface}} = \int_{\text{surface}} \vec{E}(A) \cdot d\vec{A}$$

נזכיר שוב: $d\vec{A}$ הוא וקטור הניצב לחלק קטן מהמשטח שגודלו dA ומכוון בכיוון הניצב למשטח. הקשר שאנו זקוקים לו כאן הוא שהזרם העובר דרך משטח מסויים גם הוא אינטגרל על המכפלה הסקאלארית של צפיפות הזרם (זרם ליחידת שטח), $\vec{J}$, בוקטור הניצב למשטח.

$$i_{surface} = \int_{surface} J(A) \cdot d\vec{A}$$

ולמה זה טוב? הרי אנו יודעים שבכל מקום השדה קשור לצפיפות הזרם לפי הקשר $\vec{E} = \rho \vec{J}$. מסקנה:

$$\Phi_{surface} = \int_{surface} \rho \vec{J}(A) \cdot d\vec{A}$$

עד כאן הפיתוח שלנו כללי, ועתה לבעייה הספציפית שלנו. אצלנו ρ קבוע בכל מקום ולכן ניתן להוציא אותו מהאינטגרל. כך נקבל

$$\Phi_{surface} = \rho \times \int_{surface} \vec{J}(A) \cdot d\vec{A} = \rho \times i_{surface}$$

ועכשיו לשורת המחץ: הזרם דרך כל חתך בכיוון x של הפירמידה חייב להיות קבוע, שהרי הזרם הנכנס שווה לזרם שיוצא. וגם ההתנגדות הסגולית שווה בכל מקום, ולכן השטף שווה בכל מקום. בפרט, השטף שעובר דרך המשטח של $x=h/2$ שווה לשטף דרך המשטח של $x=h$.

הערה פדגוגית: השטפים שווים למרות שהשטחים לא שווים. אדרבא: מאחר שהזרמים שווים והשטחים שונים, גם הערכים של צפיפות הזרם וגם ערכי השדה שונים בין המשטחים השונים (הם גדולים יותר במשטח הקטן יותר). זו עוד דוגמא לכך ששטפים יכולים להיות שווים גם אם השדות שונים. בהתחלה השאלה הזו הייתה מיועדת למבחן, אבל ברגע האחרון החלטנו לא להתחכם.

3. בין שתי עדשות

א. הנוסחה הדרושה לנו כאן היא נוסחת מלטשי העדשות.

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

כאשר n_1 ו- n_2 הם מקדמי השבירה של החומר ממנו מגיע האור ושל החומר ממנו עשויה העדשה, בהתאמה, ו- r_1 ו- r_2 הם רדיוסי העקמומיות של שני המשטחים המגדירים את העדשה. במקרה שלנו הדגש הוא לזכור שבעדשה קמורה כפולה האור פוגע תחילה במשטח קמור, ולכן r_1 חיובי, ואילו הוא כשהוא יוצא מהעדשה הוא עושה זאת דרך משטח קעור, ולכן r_2 שלילי. נציב, אם כן, $n_1=1$, $n_2=1.5$, $r_1=10\text{cm}$ ו- $r_2=-10\text{cm}$.

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1.5}{1} - 1 \right) \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{-10} \right) = 0.5 \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{10} \Rightarrow f = 10\text{cm}$$

זהו מוקד ממשי, כמובן – כפי שמתאים לעדשה קמורה כפולה. ואמנם, קיבלנו מרחק מוקד חיובי.

ב. למציאת מקום הדמות, עלינו להשתמש במשוואה הבסיסית של האופטיקה, הקושרת את מרחק המוקד, f , המרחק של העצם מהעדשה, p , ומרחק הדמות מהעדשה i . במקרה שלנו $f=10\text{cm}$, $p=30\text{cm}$, וכך יוצא:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{i} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{i} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{2}{30} \Rightarrow i = 15\text{cm}$$

הדמות היא כמובן, ממשית: מדובר בעדשה קמורה כפולה ובעצם הנמצא רחוק יותר ממרחק המוקד. ואמנם – קיבלנו ערך חיובי של i .

ג. כדי לקבל את גובהה של הדמות נשתמש בנוסחת ההגדלה:

$$m = -\frac{i}{p} = -\frac{15}{30} = -0.5$$

גובהה של הדמות הוא, אם כן, מחצית מגובהה של העצם, כלומר 2.5cm . הסימן הוא שלילי כי הדמות היא הפוכה – כפי שאופייני לדמות ממשית.

ד. הלוז של הסעיף הזה הוא שהדמות של העדשה הראשונה משמשת כעצם עבור העדשה השנייה. מאחר שעל-מנת לקבל דמות מדומה מעדשה קמורה כפולה על העצם להיות קרוב יותר לעדשה מאשר מרחק המוקד שלה, התשובה לשאלה היא מהו המרחק בין העדשות כך שהדמות הממשית של העדשה הראשונה תתקבל בתוך המוקד של העדשה השנייה.

ראשית עלינו לחשב את מרחק המוקד של העדשה השנייה, אותו נסמן ב- f_2 . שוב נשתמש בנוסחת מלטשי העדשות, כשעתה $r_1=5\text{cm}$, $r_2=-5\text{cm}$, והתוצאה המתקבלת היא $f_2=5\text{cm}$. כלומר – זהו המרחק המקסימאלי שבו יכולה הדמות מהעדשה הראשונה להיות מהעדשה השנייה. מאחר שהמרחק בין העדשה הראשונה לדמות שיצרה הוא $i=15\text{cm}$, יש להציב את העדשה השנייה כך שהמרחק ממנה לעדשה השנייה יהיה יעלה על 20cm .

4. תכונות של מעגל RC

א. כזכור, הזמן האופייני של מעגל RC הוא המכפלה של ההתנגדות בקיבול $\tau = R \times C$. התחכום היחיד כאן הוא שישנם שני קבלים בטור, ולכן צריך למצוא תחילה את הקיבול המשוקלל. כידוע, אם שני קבלים עם קיבול C_1 ו- C_2 מחוברים בטור, אז הקיבול הכולל, C , הוא:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{10^{-6}} + \frac{1}{4 \times 10^{-6}} = \frac{5}{4 \times 10^{-6}} \Rightarrow C = 8 \times 10^{-7} F$$

ומכאן אנו מקבלים את הזמן האופייני: $\tau = R \times C = 50 \times 8 \times 10^{-7} = 4 \times 10^{-5} \text{ sec}$.

ב. ראינו בכיתה כי במעגל RC המטען על הקבל גדל עם הזמן לפי הביטוי

$$q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-t/RC})$$

ומאחר שהמתח על הקבל הוא פשוט המטען לחלק לקיבול, המתח על הקבל תלוי בזמן ומקיים:

$$V_C(t) = \varepsilon (1 - e^{-t/RC})$$

בזמן $t = \tau = R \times C$ הביטוי בסוגריים מקבל את הערך $1 - e^{-1} = 0.632$, וכך אנו מוצאים שהמתח הכולל על הקבלים הוא:

$$V_C(t = \tau) = 0.632 \varepsilon \approx 3.16 V$$

ג. הנקודה המרכזית כאן היא לזהות שערכו החדש של הזרם מתקבל לפי חוק הלולאה של קירכהוף, בדיוק כשם שקיבלנו את המשוואות המקוריות של מעגל RC. המעגל מגיב לשינוי של המתח של הסוללה על-ידי הגדלה מיידית של הזרם (בדיוק כמו שקורה כאשר סוגרים את המפסק), ואילו המתח על הקבלים הוא זה שקיבלנו בסעיף הקודם. במעגל RC אם יודעים את הזרם בזמן t_1 , $i(t_1)$, אז הזרם בזמן t_2 הוא פשוט $i(t_1) e^{-(t_2 - t_1)/\tau}$. כלומר: $i(t = 2\tau) = i(t = \tau) \times e^{-1}$.

נציב את הערכים בחוק הלולאה:

$$\varepsilon - i(t)R - V_C(t) = 0 \Rightarrow 10 - i(t = \tau) \times 50 - 3.16 = 0 \Rightarrow i(t = \tau) = \frac{10 - 3.16}{50} \approx 0.137 A$$

להלן נסמן $i(t = \tau) = i_1$, כלומר:

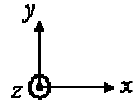
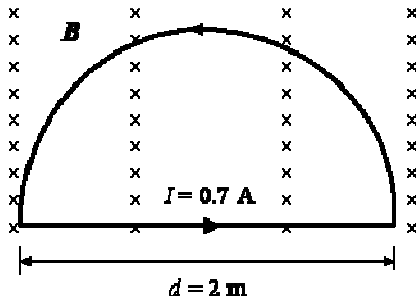
$$i(t = 2\tau) = i_1 e^{-1} \approx 0.137 \times 0.368 \approx 0.050 A$$

ד. כידוע – כאשר ישנם שני קבלים בטור המטען עליהם שווה ($Q_1 = Q_2$) ושווה גם למטען הכולל (של הקבל ה"אפקטיבי"). לפי-כך עד כל אחד מהקבלים נוסף מטען השווה לסך המטען שזרם במעגל בין שני זמנים. מאחר שבין הזמן t לזמן $t + dt$ עובר במעגל מטען של $i(t)dt$ (זוהי ההגדרה של זרם), הרי שבין שני הזמנים $t = \tau$ ו- $t = 2\tau$ עובר במעגל בסך הכל מטען של

$$\Delta q = \int_{\tau}^{2\tau} i(t) dt = \int_{\tau}^{2\tau} i_1 e^{-(t-\tau)/\tau} dt = i_1 \int_0^{\tau} e^{-x/\tau} dx = i_1 \left[-\tau (e^{-x/\tau} - e^{-0/\tau}) \right] = \tau \times i_1 (1 - e^{-1}) \approx 3.459 \times 10^{-6} C$$

זהו המטען שנוסף על כל אחד מהקבלים.

5. לולאה בשדה מגנטי



א. מומנט מגנטי של לולאה הוא הזרם בה כפול השטח שלה. הזרם נתון והשטח הוא מחצית משטח של עיגול שרדיוסו מטר אחד (בציור נתון הקוטר, שאורכו 2m). אז הנה התוצאה

$$\mu = 0.7 \times \frac{1}{2} (\pi 1^2) \approx 1.1 \text{ Am}^2 = 1.1 \text{ Joule/T}$$

(שתי האפשרויות ליחידות של מומנט מגנטי לגיטימיות). כיוון המומנט המגנטי מתקבל לפי חוק היד הימנית – הזרם הוא נגד כיוון השעון ולכן המומנט יוצא אלינו מתוך הדף (בכיוון +z).

ב. הנוסחה לחישוב הכוח על הקטע הישר של הלולאה מוכרת לנו : אם יש זרם i בקטע באורך L והשדה הוא B אז הכוח, F , הוא

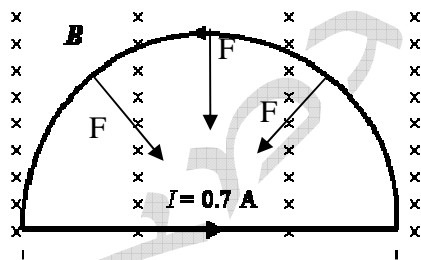
$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

כאשר $\vec{L}$ הוא וקטור שגודלו כאורך הקטע וכיוונו ככיוון הזרם. במקרה שלפנינו $\vec{L}$ מכוון משמאל לימין ואילו השדה המגנטי מכוון לתוך הדף, כך שהם ניצבים זה לזה, והעוצמה של המכפלה הוקטורית שלהם שווה למכפלת אורכיהם. מסקנה : אנחנו מקבלים כוח שערכו הוא

$$F_{\text{line}} = iLB = 0.7 \cdot 2 \cdot 1.7 = 2.38 \text{ N}$$

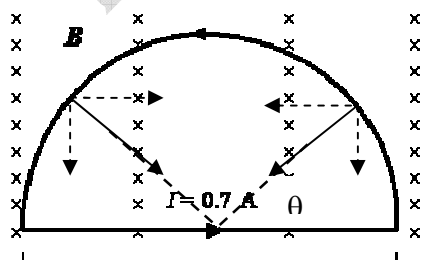
והכיוון, לפי חוק היד הימנית, הוא כלפי מעלה (לכיוון ציר ה-y).

ג. שני הסעיפים הקשים יותר של השאלה הזאת הם בעצם מיומנות בשימוש בוקטורים. נתחיל בחישוב הכוח על החלק המעגלי של הלולאה מבוסס על עיקרון דומה, אך כאן יש לבצע אינטגרציה, כי על כל קטע של החלק המעגלי יש כוח בכיוון שונה (כי כיוון הזרם שונה).



נראה זאת כך : על קטע קטן של הלולאה, $d\vec{\ell}$, יש כוח שעוצמתו $F = id\ell B$ (שימו לב שהשדה והזרם תמיד מאונכים, בכל מקום על הלולאה). לפי חוק היד הימנית הכיוון של הכוח הוא תמיד על הרדיוס של הלולאה, מכוון לתוך העיגול – ראו בציור.

עכשיו צריך להפעיל לרגע את השכל הישר, וזהו האתגר העיקרי בכל השאלה (כי כל השאר ממש פשוט). נפרק את הכוח בכל מקום לרכיב המקביל לקטע הישר ולרכיב מאונך לו (כלומר – מלמעלה למטה). די ברור שסך כל הכוחות בכיוון המקביל מתקזז : ניתן להתאים לכל נקודה במחצית הימנית של החלק המעגלי נקודה מקבילה (בגובה שווה מהקטע הישר).



מסקנה : לכוח נטו הפועל על החלק המעגלי יש רכיב רק בכיוון למטה, וערכו בכל נקודה שווה לכוח הכללי באותו מקום כפול סינוס של הזווית θ , שערכה נע בין 0 ל- π . אורכו של כל קטע קטן כזה על הלולאה הוא $Rd\theta$, כאשר R הוא רדיוס הלולאה. וכך יוצא האינטגרל:

$$F_{\text{circ}} = \int_0^\pi iRB \sin\theta d\theta = iRB \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -iRB \cos\theta \Big|_0^\pi = -iRB(\cos\pi - \cos 0) = 2iRB$$

נציב את המספרים ונקבל $F_{\text{circ}} = 2 \cdot 0.7 \cdot 1 \cdot 1.7 = 2.38N$. והכוח הזה מכוון, כאמור, מלמעלה למטה. הכוח הזה בדיוק מקזז את הכוח על החלק הישר של הלולאה, שהוא בעל עוצמה שווה ומכוון מלמעלה למעלה. מסקנה : הכוח הכולל על הלולאה הוא אפס!

ד. סעיף הקינוח כאן רק מבקש מאיתנו לבדוק אם במצב החדש יש כוח נטו שונה מאפס על הלולאה. מאחר שבכוחות מותר לעשות סופרפוזיציה נוכחותו של הרכיב החדש איננה משנה את השפעת הרכיב הישן, ואנו יודעים שהכוח נטו ממנו הוא אפס. לכן השאלה היא רק אם הכוח נטו מהרכיב החדש שונה מאפס.

הרכיב החדש מקביל לכיוון של החלק הישר של הלולאה, ולכן המכפלה הוקטורית $\vec{L} \times \vec{B}$ מתאפסת עליו. לגבי החלק המעגלי : נפרק את כיוון הזרם בכל מקום לרכיב המקביל לחלק הישר, כלומר בכיוון x , ולרכיב הניצב, כלומר בכיוון y . על הרכיבים בכיוון x אין כוח, כי הם מקבילים לרכיב החדש של השדה, ונשארו עם הרכיב בכיוון y בכל מקום על החלק המעגלי. עכשיו אפשר לסיים :

- במחצית הימנית של החלק המעגלי הרכיב של הזרם בכיוון y הוא חיובי (כלפי מעלה), ולכן הכוח הוא לתוך הדף (השתמשו בחוק ביד הימנית – זרם כלפי מעלה, השדה ימינה).
- במחצית השמאלית של החלק המעגלי הרכיב של הזרם בכיוון y הוא שלילי (כלפי מטה), ולכן הכוח עליו מכוון החוצה מהדף (שוב חוק ביד הימנית – זרם כלפי מטה, השדה ימינה).

מסקנה : הוספת הרכיב החדש יוצרת torque נטו על הלולאה שגורם לה להסתובב.

6. כדור טעון, קליפה, טעונה ופוטנציאל

א. העקרון כאן הוא פשוט: מחוץ לכדור טעון ישנו שדה כאילו מדובר במטען נקודתי במרכז הכדור. את התוצאה הזאת, קיבלנו – כזכור – בעזרת חוק גאוס. כאשר מדובר במטען נקודתי יחיד, מציאת הפוטנציאל היא טריוויאלית: $V=kq/r$. בפרט, על שפת הכדור שלנו הפוטנציאל הוא

$$V = k \frac{q_1}{a} = 9 \times 10^9 \frac{5 \times 10^{-6}}{0.03} = 1.5 \times 10^6 \text{ V}$$

ב. שני השיקולים שעלינו להשתמש בהם הם (1) במוליך השדה צריך להיות אפס (כל עוד אין זרמים, כלומר עוסקים באלקטרוסטטיקה, וזה המצב לפנינו); (2) מחוץ להתפלגות מטען כדורית יש שדה המתאים למטען נקודתי במרכז הכדור (זהו ניסוח כללי יותר של העיקרון שהוזכר בסעיף הראשון).

ובכן, הודות לסימטריה הכדורית אפשר לקבוע, כי כדי שיהיה שדה חשמלי אפס ברדיוס מסויים בתוך הקליפה המוליכה, על סך המטען המצוי מתחת לרדיוס זה להתאפס. אם כך, המטען בתוך הקליפה הטעונה **בכל** רדיוס שהוא בין b ל- c צריך להיות בדיוק $-q_1$, כדי שבסך הכל יהיה מתחת לרדיוס זה מטען כולל אפס. מכאן שעל השפה הפנימית של הקליפה המוליכה ישנו מטען של $-q_1$.

מכאן ההמשך פשוט: מאחר שמדובר במוליך, כל המטען העודף בקליפה הכדורית נמצא על השפות – או על הפנימית או על החיצונית. על השפה הפנימית יש מטען $-q_1 = -5 \mu\text{C}$, ואילו סך כל המטען העודף הוא $q_2 = -2 \mu\text{C}$. לכן על השפה החיצונית צריך להיות $q = q_2 - (-q_1) = 3 \mu\text{C}$. נחלק את המטען הזה על-פני השטח החיצוני של הקליפה הכדורית, כלומר על שטח של $A = 4\pi c^2$, ונקבל

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{3 \times 10^{-6}}{4\pi 0.06^2} \approx 6.63 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

ג. הפואנטה בשאלה הזו היא שאם מגדירים את הפוטנציאל באינסוף כאפס, הפוטנציאל בכל מקום נקבע לפי העבודה שצריך לעשות כדי להביא את המטען מאינסוף אל אותו מקום. לכן, למרות שהשדה החשמלי על שפת הכדור הפנימי איננו מושפע מנוכחות הקליפה הכדורית, הרי ש**מבחינת הפוטנציאל** המצב החדש איננו שקול לקודם.

נמצא את הפוטנציאל על-ידי חישוב הפרש הפוטנציאלים מאינסוף אל שפת הכדור הפנימי, במסע המחולק לשלושה שלבים (שימו לב – זה שקול לבדיקת העבודה שעושה השדה החשמלי על מטען בוחן שערכו q_0 העושה מסע כזה – ובסוף מחלקים את העבודה ב- q_0 והופכים סימן, כדי לקבל את הפוטנציאל):

(1) הבאת המטען ממרחק אינסופי לרדיוס c .

(2) הזזת המטען בתוך הקליפה הכדורית מרדיוס c לרדיוס b .

(3) הזזת המטען בין הקליפה לשפת הכדור הפנימי, כלומר מרדיוס b לרדיוס a .

השלב הראשון פשוט, כי מבחינת השדה מעבר לרדיוס c נראית כל התפלגות המטען הכדורית כמטען נקודתי במרכז. ערכו של המטען הנקודתי הוא $q_{\text{tot}} = q_1 + q_2 = 3 \mu\text{C}$. כלומר, הפוטנציאל ברדיוס c הוא

$$\Delta V(\infty \text{ to } c) = k \frac{q_{\text{tot}}}{c} = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-6}}{0.06} = 4.5 \times 10^5 \text{ V}$$

השלב השני פשוט מאוד: הרי בתוך המוליך השדה החשמלי הוא אפס – ואם $E(r)=dV/dr$, הרי שהפוטנציאל החשמלי קבוע. ואכן הזכרנו בכיתה – כל החלק הפנימי של מוליך באלקטרוסטטיקה הוא שווה פוטנציאל. הפרש הפוטנציאלים בין רדיוס c לרדיוס b הוא אפס.

$$\Delta V(c \text{ to } b) \equiv V(b) - V(c) = 0$$

וגם השלב האחרון נורא פשוט, כי עתה אנו עוסקים בתנאים של מטען כדורי נקודתי, כמו בסעיף הראשון. הפרש הפוטנציאלים בין רדיוס b לרדיוס a הוא בדיוק כמו בסעיף א', כלומר

$$\Delta V(b \text{ to } a) = k \frac{q_1}{a} - k \frac{q_1}{b} = kq_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{0.03} - \frac{1}{0.05} \right) = 6.0 \times 10^5 \text{ V}$$

הדגש בשאלה הזאת היא ש- kq/a איננו הפוטנציאל ברדיוס a , כי סך כל העבודה הדרושה כדי להביא מטען מאינסוף לרדיוס a שונה מאשר בסעיף א'. הנקודה העדינה (שהיא האתגר של השאלה) היא להבין שהפרש הפוטנציאלים בין רדיוס b לרדיוס a ממשיך להיות כמו במצב של הכדור החשוף.

בסך הכל, הפוטנציאל ברדיוס a הוא

$$\begin{aligned} V(a) &= V(\infty) + \Delta V(\infty \text{ to } c) + \Delta V(c \text{ to } b) + \Delta V(b \text{ to } a) = \\ &= 0 + 4.5 \times 10^5 + 0 + 6.0 \times 10^5 = 1.05 \times 10^6 \text{ V} \end{aligned}$$

וזה אכן שונה מהערך שמצאנו בסעיף א'.

ד. אם מבינים את סעיף ג', סעיף ד' קל מאוד. ראשית, יש הטעייה במילים של השאלה, כי שאלנו על מרכז הכדור, והשוואה רלוונטית לסעיף ג' היא של הפוטנציאל על שפת הכדור בשני המצבים (או במרכז הכדור בשני המצבים). אם נדון בפוטנציאל על שפת הכדור ברור שהשלב (1) והשלב (3) מהסעיף הקודם זהים גם כאשר המטען מפוזר בכל הקליפה הטעונה. ההבדל היחיד הוא בשלב (2) כי כאשר המטען מפוזר על כל הקליפה הכדורית היא איננה שווה פוטנציאל.

כל רדיוס בתוך הקליפה הכדורית (כלומר, בין b ל- c) מכיל מטען חיובי $3\mu\text{C}$ ברדיוס c , $5\mu\text{C}$ ברדיוס b – שם רואים רק את הכדור הפנימי, ולכן יש בו שדה חשמלי חיובי (כלפי חוץ). כלומר, יש גם הפרש פוטנציאלים בין רדיוס b לרדיוס c , והוא חיובי (כי השדה חיובי – מכוון החוצה). לסיכום – ההפרש $\Delta V(c \text{ to } b) > 0$, ובסך הכל, במקרה שהקליפה הכדורית עשויה ממבודד, הפוטנציאל על שפת הכדור גדול יותר מאשר אם הקליפה עשויה ממוליך.

(אגב – אותה תוצאה מתקיימת אם דנים בפוטנציאל במרכז הכדור – שהרי הפרש הפוטנציאלים בין שפת הכדור למרכזו זהה בין אם יש קליפה כדורית מוליכה, מבודדת ובין אם אין קליפה בכלל).

7. גשר, גלים וג'יימס בונד

א. מהירות של גל קשורה לאורך הגל, λ , ולתדירות, f , לפי הקשר $v = \lambda f$. לכן נקבל

$$v = \lambda f = 5 \times 1 = 5 \text{ m/sec}$$

ב. מצאנו בכיתה את הביטוי להספק הנדרש כדי להניע גל בתווך חד-מימדי כמו חבל – או גשר. הביטוי הוא

$$P = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2$$

כאשר μ היא צפיפות המסה ליחידת אורך בתווך שבו עובר הגל, ω היא התדירות הזוויתית (זכרו: $\omega = 2\pi f$), y_m היא האמפליטודה. נציב את הערכים:

$$P = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \times (2\pi \times 1)^2 \times 3^2 \approx 8882.6 \text{ Watt}$$

ג. הדגש כאן הוא על-כך שאורך הגשר, 20m, הוא מספר שלם של אורכי גל – ארבעה ליתר דיוק. כך שהכוונה היא שנוצר כאן **גל עומד**. תבנית הגל בגשר צריכה להיות, לכן, מאוד פשוטה. נבדוק מה קורה על-פני אורך גל אחד, המתחיל בקצה של הגשר. נסמן את המרחק מהקצה הזה ב- x (כלומר - ב- $x=0$ האמפליטודה היא אפס). בתוך הגל מתקבלת התמונה הבאה - ב- $x=1.25\text{m}$ (רבע אורך גל) האמפליטודה היא 3m (הגשר מתנדנד בין 3m ל-3m), ב- $x=2.5\text{m}$ (חצי אורך גל) האמפליטודה היא שוב אפס, ב- $x=3.75\text{m}$ (שלושה רבעים של אורך גל) האמפליטודה שוב 3m, וב- $x=5\text{m}$ האמפליטודה שוב אפס. מסקנה: בין $x=0$ ל- $x=5$ ישנם שלושה מקומות שבהם האמפליטודה היא תמיד אפס: בתחילת הגל, בסופו ובמרחק של חצי אורך גל. בניסוח אחר: כל 2.5m (חצי אורך גל) יש נקודה שקטה – נקודה שבה אין תנודות. שלושת אורכי הגל הבאים מוספים כל אחד עוד שתי נקודות, ובסך הכל ישנם תשעה מקומות על הגשר שבהם האמפליטודה היא אפס בדיוק – כולל שני הקצוות של הגשר. מי שמבקש לענות רק על המקומות שאינם על הקצוות צריך לציין שבעה כאלה – $x=2.5, 5.0, 7.5, 10.0, 12.5, 15.0, 17.5\text{m}$.

ד. כאן עלינו לחשב התאבכות של שני גלים, לפי המתכונת שהוצגה בכיתה. ראשית, לפי עיקרון הסופרפוזיציה של גלים,

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

שנית, אם נכתוב במפורש את המבנה של גלים סינוסואדאליים, שאחד הוא בהפרש פאזה מהשני נקבל

$$y(x, t) = y_{m1} \sin(kx - \omega t) + y_{m2} \sin(kx - \omega t + \phi)$$

ההתחכמות היחידה (והלא-גדולה) כאן היא שהאמפליטודות של שני הגלים, y_{m1} ו- y_{m2} , אינן שוות. נציב את המספרים כדי לראות כיצד להמשיך. כדי לא לסחוב 2π בכל מקום, נסתפק בסימון $k = 2\pi/\lambda$ ו- $\omega = 2\pi f$, אך נזכור שאלה אינם משתנים אלא קבועים.

$$y(12, t) = 3 \sin(k \cdot 12 - \omega t) + 2 \sin(k \cdot 12 - \omega t + 120^\circ) =$$

נוח לפרק באופן הבא

$$= 2 \sin(k \cdot 12 - \omega t) + 2 \sin(k \cdot 12 - \omega t + 120^\circ) + \sin(k \cdot 12 - \omega t)$$

שני האיברים הראשונים מחזירים אותנו להתאבכות פשוטה של שני גלים עם אורך גל, תדירות ואמפליטודה שווה, ואז אנחנו מקבלים

$$y(12,t) = \left[2 \cdot 2 \cos \frac{120^\circ}{2} \sin \left(k12 - \omega t + \frac{120^\circ}{2} \right) \right] + \sin(k12 - \omega t)$$

כאשר ה-2 הראשון מגיע מנוסחת ההתאבכות (לפי נוסחת חיבור סינוסים) וה-2 השני הוא האמפליטודה. כידוע $\cos(60^\circ) = 1/2$, ולכן אנו מקבלים

$$y(12,t) = [2 \cdot \sin(k12 - \omega t + 60^\circ)] + \sin(k \cdot 12 - \omega t)$$

איך להמשיך מכאן?

אפשר לפרק את הסינוס הראשון לפי נוסחת סינוס של סכום (מאחר שלא נתנו אותה בשאלה לא היינו דורשים זאת במבחן). לשם השלמות נראה איך עושים זאת. ראשית:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

ולכן

$$\sin(k12 - \omega t + 60^\circ) = \sin(k12 - \omega t) \cos 60^\circ + \cos(k12 - \omega t) \sin 60^\circ$$

נציב שוב $\cos 60^\circ = 1/2$ וגם $\sin 60^\circ = 0.866$ ונקבל:

$$y(12,t) = 2 \sin(k12 - \omega t) + 1.73 \cdot \cos(k12 - \omega t)$$

8. משאית בלילה

א. כדי להבחין בעין שלנו בין שני הפנסים נדרוש שבתמונות העקיפה שלהם דרך האישון המרחק בין המקסימום המרכזי של שני האורות יהיה גדול מהמרחק בין כל מקסימום למינימום הראשון שלו. בקורס ניסחנו את הקריטריון הכמותי – הלא הוא קריטריון Rayleigh – ולפיו על המרחק הזוויתי בין שני האורות, θ , להיות לפחות כזה שיקיים

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

כאשר d הוא גודל הסדק (קוטר האישון במקרה שלנו), ו- λ הוא אורך הגל. זכרו שהמקדם 1.22 נובע מכך שהאישון שלנו הוא התקן אופטי מעגלי. כשעובדים בראדיאנים ובהנחה של זוויות קטנות (שבוודאי מתקיימת – המרחק למשאית גדול מאוד יחסית למרחק בין הפנסים), אפשר לקרב $\sin \theta \approx \theta$, ונקבל

$$\theta \approx 1.22 \frac{5.5 \times 10^{-7} \text{ m}}{3 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.237 \times 10^{-4}$$

כשהמרחק הזוויתי הוא θ , פירוש הדבר שהיחס בין המרחק בין הפנסים, ℓ , למרחק מהמשאית אלינו, L , מקיים $\tan \theta = \ell/L$, ועבור זוויות קטנות $\tan \theta \approx \theta$, כלומר:

$$\theta \approx \frac{\ell}{L} = \frac{2 \text{ m}}{L} \Rightarrow L = \frac{2 \text{ m}}{2.237 \times 10^{-4}} \approx 8942 \text{ m}$$

כן, כמעט תשעה קילומטרים.

ב. מהירות האור היא, כידוע, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$, ולכן הזמן הדרוש לעבור את המרחק הוא

$$t = \frac{L}{c} = \frac{8942 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/sec}} \approx 2.98 \times 10^{-5} \text{ sec}$$

כ- $30 \mu\text{sec}$. לא בכדי קשה היה לבני האדם לזהות שלאור יש מהירות סופית (ולא אינסופית).

ג. הכוונה בסעיף זה היא להשתמש במובן המרחבי של קריטריון Rayleigh שהוזכר למעלה. כשהמשאית במרחק שמצאנו בסעיף א', הרדיוס של כל כתם שווה בדיוק לגודל הזוויתי של המרחק בין הפנסים. אם נסמן את המרחק בין האישון לרשתית ב- L_p , ואת רדיוס הכתם על הרשתית, s , צריך להתקיים $\tan \theta = s/L_p$. ושוב בעזרת הקירוב $\tan \theta \approx \theta$ נקבל

$$\theta \approx \frac{s}{L_p} = \frac{s}{2.5 \text{ cm}} \Rightarrow s = 2.237 \times 10^{-4} \times 2.5 \approx 5.59 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

רדיוס הכתם הוא מעט יותר מחמישה וחצי מיקרומטר. מאחר שהשאלה מבקשת את הקוטר, צריך להכפיל פי שניים, והקוטר הוא בערך $1.12 \times 10^{-3} \text{ cm}$.

ד. תזכורת – מהירות הגל שווה למכפלה של אורך הגל בתדירות. אם $c/v = 1.1$, כאשר v היא מהירות האור בתווך שאיננו אוויר. פירוש הדבר שמהירות האור באוויר רווי הטיפות בשאלה נמוכה יותר מאשר מהירות האור באוויר רגיל. לכן המכפלה של תדירות האור באורך הגל שלו קטנה יותר באוויר רווי הטיפות יחסית לאוויר רגיל. ומאחר שהתדירות איננה משתנה, אורך הגל הוא שחייב לקטון.

למי שמעדיף לראות את הטיעון הזה בנוסחאות:

באוויר רגיל $c = \lambda f$, ואילו באוויר רווי הטיפות $v = \lambda_{\text{new}} f_{\text{new}}$, כלומר $\lambda_{\text{new}} f_{\text{new}} = c/1.1$. ומאחר שהתדירות לא משתנה $f_{\text{new}} = f$, כלומר $\lambda_{\text{new}} = c/(1.1f)$, לעומת $\lambda = c/f$. מכאן ברור שאורך הגל של האור מהפנסים מתקצר בגלל המעבר באוויר רווי הטיפות (מבחינה כמותית – בערך ב-10%). ואם אורך הגל מתקצר, אז יש לחשב מרחק זוויתי ומרחק אמיתי חדשים לפי קריטריון Rayleigh. מאחר שהמרחק תלוי ב- $1/\lambda$ אנו מסיקים שהמרחק המקסימאלי להפרדה בין הטיפות גדל.

הערה פדגוגית: ברור שיש עיוות ניכר בשאלה הזאת, כי באוויר רווי טיפות חלק גדול מהאור נבלע או מפוזר, ולא נוכל לראות לקילומטרים – ולכן אין לנו אפשרות לקבל אינטואיציה נוחה בשאלה הזו.