הדגמה של דיפוזיה כתהליך של מהלך אקראי

נניח שישנו תהליך כזה: חלקיק מוכנסים למערכת חד-מימדית, כך שברגע $t=0$ הוא נמצא ב-$x=0$. כל חלקיק בתורו עושה צעד ימינה או שמאלה, כאשר אורך הצעד הוא δ, ובכל צעד החלקיק יכול לצעוד ימינה בהסתברות 1/2 או שמאלה בהסתברות 1/2. נסמן ב $x_i(n)$ את מקומו של החלקיק ה-i לאחר n צעדים (שימו לב ש-x יכול להיות גם שלילי, אם החלקיק עשה יותר צעדים שמאלה מאשר ימינה).

נחזור על הניסוי עם עוד ועוד חלקיקים – N בסך הכל. מה נוכל לומר על ההתפלגות של $x(n)$ של החלקיקים השונים?

ראשית, לכל חלקיק בנפרד ברור כי מיקומו אחרי הצעד ה-n יהיה במרחק $+\delta$ או $-\delta$ ממיקומו אחרי הצעד ה-(n-1):

$$x_i(n) = x_i(n-1) \pm \delta$$

כאשר אנו מצפים כי עבור מספר גדול של חלקיקים, לכחצי מהם יתאים סימן + ולכחצי סימן -.

עכשיו נמצע על כל החלקיקים:

$$\langle x(n) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(n)$$

ולכן:

$$\langle x(n) \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i(n) = \sum_{i=1}^{N} x_i(n-1) \pm \delta = \langle x(n-1) \rangle + 0$$

ברור שממוצע על $\pm\delta$ נותן אפס, כי לחצי מהחלקיקים יש + ולחצי יש -.

המיקום הממוצע של החלקיקים איננו משתנה עם התקדמות הצעדים, והוא כמובן שווה לאפס, כי הבעיה סימטרית לגמרי.

אך מה לגבי הממוצע של ריבוע המרחק מהראשית? שוב נבדוק את הקשר בין המצב אחרי הצעד ה-n למצב אחרי הצעד ה-n-1.

$$x_i^2(n) = (x_i(n-1) \pm \delta)^2 = x_i^2(n-1) \pm 2x_i(n-1)\delta + \delta^2$$

ולכן, בממוצע:

$$\left\langle x^2(n) \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^2(n) = \sum_{i=1}^{N} (x_i(n-1) \pm \delta)^2 = \left\langle x^2(n-1) \right\rangle \pm 2\langle x_i(n-1)\delta \rangle + \left\langle \delta^2 \right\rangle$$

הממוצע השני באגף שמאל הוא, כמובן, אפס (כמו קודם), אבל הממוצע על האיבר השלישי איננו אפס:

$$\left\langle x^2(n) \right\rangle = \left\langle x^2(n-1) \right\rangle + \left\langle \delta^2 \right\rangle$$

הממוצע של המרחק בריבוע מהמרכז גדל בכל צעד ב-δ^2.

מאחר שאחרי אפס צעדים $\left\langle x^2(0)\right\rangle = 0$

ואחרי צעד אחד $\left\langle x^2(1)\right\rangle = \delta^2$

אנו מוצאים כי

$$\left\langle x^2(n)\right\rangle = n\delta^2 \ .$$

המסקנה הזו מעניינת מאוד: בערך מוחלט, המרחק הממוצע מהראשית שחלקיק מגיע אליו ב-n צעדים הוא

$$\left\langle |x|\right\rangle \approx \sqrt{\left\langle x^2(n)\right\rangle} = \sqrt{n}\times\delta$$

מעניין להשוות: חלקיק שעושה n צעדים שכולם באותו כיוון היה מגיע למרחק $n\times\delta$ מהראשית. משמעות הדבר שהיעילות של מהלך אקראי בהרחקת חלקיקים מהראשית מדוכאת פי $\sqrt{n}$ יחסית לתנועה חופשית.