הרצאה בנושא: משוואות ההידרודינמיקה גלי הלם וכו'...

משוואת הרציפות:

כמות המסה שיוצאת מנפח V_0 ביח' זמן היא: $\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$

השינוי בכמות המסה ביח' הנפח היא: $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV$

לכן: $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = -\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$

בעזרת משפט הדיברגנס: $\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0$

היות והמשוואה תקפה עבור כל נפח שרירותי, היא תקפה בכל נקודה:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \longleftrightarrow \text{משוואת הרציפות}$$

משוואת המומנטום = משוואת אוילר Euler

הכח הפועל על יח' נפח: $-\oint p \, d\vec{s} + \int \vec{f}_{ext} \, dV$

p - הלחץ, f_{ext} הכח החיצוני (כגון כבידה) ליח' נפח.

בעזרת משפט הדיברגנס: $= -\int \vec{\nabla} p \, dV + \int \vec{f}_{ext} \, dV$

כלו'. על כל אלמנט נפח של הנוזל פועל כח $-\vec{\nabla} p + \vec{f}_{ext}$

אם נקח את $f = ma$ ונסתכל על אלמנט מסה הנמצא ביח' נפח, יתקיים:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{ext}$$

הנגזרת $\frac{D}{Dt}$ היא הנגזרת הלגרנז'יאנית – הכוונה - כיצד משתנה המשתנה $\vec{v}$ של האלמנט הספציפי ביח' זמן. היות והאלמנט זז $\frac{D}{Dt} \neq \frac{\partial}{\partial t}$.

למה שווה הנגזרת הלגרנז'יאנית של גודל $\vec{A}$ (נגזרת "שלמה")?

$$A(x,t) \xrightarrow{\vec{v}\Delta t} A(x+\vec{v}\Delta t,\ t+\Delta t)$$

לאחר זמן Δt, השינוי ב-A הוא:

$$\Delta A = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)\Delta t + \Delta x\frac{\partial A}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial A}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial A}{\partial z} =$$

$$= \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)\Delta t + (\vec{\Delta r}\cdot\vec{\nabla})A$$

אם נחלק ב- Δt נקבל:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})A$$

נחזור למשוואת המומנטום. נקבל לכן:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + f_{ext} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \frac{f_{ext}}{\rho}}$$

כח ליח' מסה (למשל $\vec{g}$).

זוהי משוואת אוילר.

משוואת האנרגיה

משוואת האנרגיה מתקבלת מהחוק הראשון של התרמודינמיקה. נסתכל על אלמנט בעל יח' מסה.
יתקיים עבורו כי:

$$dU = Q - P\,dV$$

או ליח' זמן:

$$\frac{dU}{dt} + P\frac{dV}{dt} = q$$

קצב חימום ליח' מסה ליח' זמן.

$U = \varepsilon/\rho$ - אנרגיה ליח' מסה
ε - אנרגיה ליח' נפח.

$V \equiv 1/\rho$ ← הנפח של יח' מסה

אחרי עבודה (כעמוד) של אלגברה ושימוש במשוואת הרציפות והתנע ניתן להראות (החישוב מתואר ב- §6 של L&L Fluid Mechanics)
ש- :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\underbrace{\varepsilon + \tfrac{1}{2}\rho v^2}_{\text{צפיפות אנרגיה של החומר}}\Big] + \nabla\cdot\Big[\underbrace{\vec{u}\left(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\rho u^2\right)}_{\text{שטף אנרגיה}} + \underbrace{P\vec{u}}_{\text{שטף עבודה מכנית}}\Big] = \underbrace{\rho q}_{\text{קצב הכנסת חום ליח' נפח}}$$

במערכות בעלות סימטריה ניתן לעבור לקואורדינטות לגרנז'יאניות.

1. במערכת "לינארית" בעלת תלות רק ב- x (slab geometry) נעבור למשתנה m

כך ש- $dm = \rho\, dx$

משוואת הרציפות תהיה:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = 0$$

אם נעבור ל- $V \equiv 1/\rho$ נקבל:

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho}(\nabla\cdot\vec{v})$$

בסימטריה שלנו:

$$\boxed{\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial m}}$$

משוואת המומנטום:

$$\boxed{\frac{Du}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial m}}$$

ומשוואת האנרגיה:

$$\boxed{\frac{DU}{Dt} + p\frac{DV}{Dt} = Q}$$

כמו כן, יש לרשום ביטוי עבור הרדיוס:

$$x(m,t) = \int_0^m V(m',t)\,dm' + x(m=0,t)$$

2. במערכת ספרית סימטרית:

$$dm = 4\pi r^2 \rho\, dr$$

כמו כן, דיברגנס במערכת זו הוא:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)$$

לכן:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = \frac{\partial}{\partial m}(4\pi r^2 v)$$

ומשוואת התנע:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -4\pi r^2\frac{\partial p}{\partial m}$$

ומשוואת האנרגיה:

$$\frac{DU}{Dt} + p\frac{DV}{Dt} = Q$$

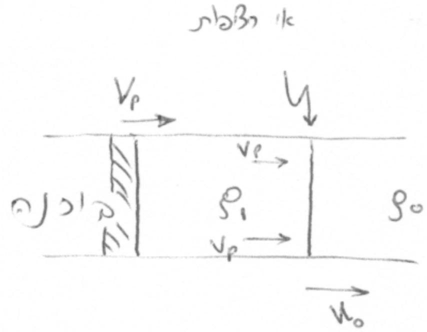
ואת הרדיוס יש למצוא ע"י

$$r(m,t) = \int_0^m \frac{V(m',t)}{4\pi r^2}\,dm' + r(m=0,t)$$

כמובן שהסט משוואות אינו סגור ללא קשר מהצורה $U = U(P,V)$

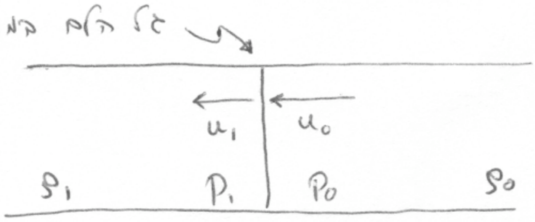
(או $P = P(\epsilon, V)$ וכו'...), דהיינו משוואת מצב.

גלי הלם:



האם ניתן למצוא פתרון עם אי רציפות?

כדי לפתור את הבעיה של גל הלם, נעבור למערכת של האי רציפות.



אנו רוצים למצוא קשרים בין הגדלים לפני הגל הלם (בצד ימין) לגדלים אחרי!

ראשית - היות ואנו במערכת הגל, הגדלים אינם משתנים מפורשות בזמן, דהיינו, ∂_t נופל מהמשוואות. הן נראות:

נופל

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}()} + \nabla\cdot(\ ) = (\ )$$

כמו כן, המקור בצד ימין יספיק מעט מאוד לתרום אם מדובר בשינוי מ-x_0+ ל-x_0-. נסתכל על נפח קטן מסביב לגל הלם, ונראה זאת במפורש:

$$\int\left[\nabla\cdot(\vec{\phi}) - (q)\right] dV = 0$$

האיבר מתאפס.

בגבול $dV \to 0$ נקבל,

כמו כן:

$$\int\left[\nabla\cdot(\vec{\phi})\right] dV = \oint \vec{\Phi}\cdot d\vec{s}$$

על הצדדים הניצבים לגל ההלם, התרומות של $\vec{\phi}\cdot d\vec{s}$ מהצדדים המנוגדים מתבטלות אוטומטית, ואולם, אין זה המקרה עבור הצדדים שמקבילים ל-Φ היות וישנם גדלים שעוברים אי רציפות בתוך הכיוון ל-Φים. לכן, נקבל:

$$\Phi_{\perp,1} - \Phi_{\perp,0} = 0$$

הרכיב של $\vec{\phi}$ ש-$\perp$ לגל ההלם

נוכל כעת להשתמש במשוואות ההידרודינמיקה ולקבל את התנאים:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_0 u_0 \\ P_1 + \rho_1 u_1^2 &= P_0 + \rho_0 u_0^2 \\ U_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}u_1^2 &= U_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2}u_0^2 \end{aligned}}$$

בעזרת המשוואה הראשונה והשניה, ניתן לקבל:

מ-1: $$u_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1} u_0$$

מ-2: $$\rho_0 u_0^2 - \rho_1 u_1^2 = P_1 - P_0 \Rightarrow \rho_0 u_0^2 - \frac{\rho_0^2}{\rho_1} u_0^2 = P_1 - P_0$$

ולכן: $$(\rho_1 u_0^2 - \rho_0 u_0^2) = \frac{\rho_1}{\rho_0}(P_1 - P_0)$$

או $$\boxed{u_0^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)}}$$

עבור P שהוא מונוטוני ב- ρ (תמיד...) נקבל:

$$c_1^2 > \frac{P_1 - P_0}{\rho_1 - \rho_0} > c_0^2 \quad ; \quad c = \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

ולכן: $$u_0^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)} > \frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)} > c_0^2$$

כי $\rho_1 > \rho_0$

אם נחליף את האינדקסים ונזכור שהפעם $\rho_0 < \rho_1$, נקבל:

$$u_1^2 = \frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)} < \frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)} < c_1^2$$

המשמעות שמתקבלת היא שהגל הלם חייב לנוע במהירות סופר-סונית יחסית לגאז אליו הוא נכנס (גל הלם חייב להיות על קולי!) ואילו הגאז שמתרחק מהגל הלם, חייב לנוע במהירות תת-קולית יחסית לגל הלם.

כדי שנוכל להשתמש במשוואה האחרונה אנחנו צריכים עוד קשר המקשר בין U או ε ל- P, V וכו'...

היות והגל הלם מתרחש על זמן אינפיניטיסימלי, הגאז אינו יכול להחליף חום עם הסביבה ולכן הוא יהיה אדיאבטי:

$$P = A\rho^{\gamma}$$

γ - הקבוע האדיאבטי. ($\gamma = 5/3$ עבור גאז חד-אטומי.)

בתהליך אדיאבטי:

$$dU = -P\,dV = -A V^{-\gamma} dV$$

ולכן:

$$U = -A\frac{1}{1-\gamma}V^{1-\gamma} = +\frac{V}{\gamma-1}AV^{-\gamma}$$

ולבסוף:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\frac{U}{V}}} = +\underline{\underline{\frac{P}{\gamma-1}}}$$

את המשוואה האחרונה של תנאי הגל הלם, ניתן לרשום בצורה:

$$U_1 - U_0 = \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_0^2 \underset{\text{הצבה של } u_0,\, u_1}{\uparrow}{=} \frac{1}{2}(P_1+P_0)(V_0-V_1)$$

ממוצע של העבודה המכנית בדחיסת הגאז.

אם נציב את הקשר האדיאבטי נקבל:

$$\frac{1}{\gamma-1}(P_1V_1 - P_0V_0) = \frac{1}{2}(P_1+P_0)(V_0+V_1)$$

אחרי מניפולציות מקבלים:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{(\gamma+1)V_0 - (\gamma-1)V_1}{(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0}$$

או:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma-1)P_1 + (\gamma+1)P_0}{(\gamma+1)P_1 + (\gamma-1)P_0}$$

בגבול של גל הלם חזק מאוד $\frac{P_1}{P_0} \to \infty$ ואז:

$$\frac{V_1}{V_0} \to \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \underset{\gamma=5/3}{\uparrow}{=} 4$$

דהיינו, לא ניתן לדחוס את הגאז יותר מפקטור מסוים ללא כל קשר לכמה חזק הגל הלם.