דינמיקה בדיסקאות גלקטיות (ואחרות!)

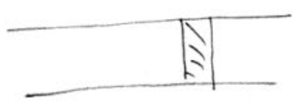
בשעור זה, מעניין אותנו להבין את הדינמיקה של גאז וכוכבים בדיסקאות של גלקסיות. בין היתר, נרצה להבין באילו תנאים ניתן לקבל קריסה גרביטציונית (ומה שנקרא הקריטריון של טומרה - Toomre) וגם, מה פשרם של הזרועות הגלקטיות.

* דינמיקה בדיסקה - סדרי גודל ותהליכים בסיסיים.

(תחילה ננסה להבין מה יכול לקרות בדיסקה מבלי לחשב דבר.

גרביטציה – האלמנט הבסיסי הראשון הוא הכבידה. להבדיל מדיסקאות ספירה סביב כוכבים למשל, שמרגישים רק את הכח המרכזי. דיסקאות גלקטיות הן שונות בכך שכח הכבידה העצמי שלהם חשוב לדינמיקה (לא תמיד לדינמיקה הסיבובית שיכולה להיות מוכתבת ע"י החומר האופל, אך בהחלט לדינמיקה של הפרעות בתוך הדיסקה).

דיסקה



כמות חומר Σ ליח' שטח (gr/cm^2)

הדיסקאות מאופיינות ע"י Σ, כמות החומר ליח' שטח. התאוצה האופיינית ל"הפרעה" בדיסקה, כתוצאה מהכבידה תהיה:

$$a_G \sim \Sigma G \cdot \left(\frac{\delta\Sigma}{\Sigma}\right)$$

<u>לחץ</u>: לחץ הגאז <u>או</u> הדיספרסיה של הכוכבים (שהיא "הלחץ האפקטיבי" של "גאז" הכוכבים) מנסה להתנגד לקריסה הגרביטציונית. התאוצה הזו, להפרעה שהיא של סקלה k^{-1} (k וקטור הגל). תהיה:

$$a_P \sim \underbrace{c_s^2}\, k\left(\frac{\delta\Sigma}{\Sigma}\right)$$

מהירות הקול הרלוונטית (איזותרמית או אדיאבטית).
או דיספרסיה σ^2

מתי הגרביטציה תנצח? אם התאוצה הקשורה בה תהיה גדולה מהתאוצה הקשורה בלחץ.

בדקנו: אי יציבות גרביטציות תתרחש עבור:

$$a_G \approx a_P \Rightarrow \Sigma G \approx c_s^2 k \Rightarrow k \approx \frac{\Sigma G}{c_s^2}$$ (אי יציבות)

כ״א, על אורכי גל גדולים המערכת תהיה לא יציבה לקריסה גרביטציונית. זהו האקוויוולנט הדו-מימדי של אי יציבות ג'ינס. אולם, להבדיל מהמערכת התלת מימדית, יש גם אפקט נוסף, חשוב מאוד.

התנועה הסיבובית והתנועה האפיציקלית

היות והדיסקה מסתובבת, לכל רדיוס ורדיוס ניתן להגדיר תדירות סיבוב $\Omega(r)$ (ממוצעת במידה ונשמרת הסימטריה הסיבובית). אולם, ישנה תדירות נוספת חשובה. אם עושים הפרעה לחלקיק הנע בתנועה מעגלית, אני מוסיף לתנועה הלא מופרעת, החלקיק יבצע תנועה מחזורית נוספת בתדירות האפיציקלית κ. בפוטנציאל קפלרי, $\kappa = \Omega$ ולכן התנועה הכוללת סגורה ושווה לאליפסה, אולם במקרה הכללי אין הדבר מתחייב.

בקפלר $\kappa = \Omega$

ניתן לתאר את התנועה כתנועה מעגלית + תנועה אפיציקלית.

בתנועה הרמונית: $\kappa = 2\Omega$

ניתן להראות (ונראה בהמשך!) ש- $\kappa = 2\Omega\sqrt{1+\frac{1}{2}\frac{d\ln\Omega}{d\ln r}}$

השפעת התנועה האפציקלית דומה להשפעת הלחץ - שתיהן תורמות להתנגד לכבידה.

התאוצה האופיינית של גופים בדסקה $a_\kappa \approx \kappa \cdot v_{typical}$

אם מדובר בגז (לחץ למשל) $v_{typical} \sim c_s \frac{d\Sigma}{\Sigma}$

(שווה תאוצה זו לתאוצה הגרביטציונית:

$a_G \gtrsim a_\kappa$ (אי יציבות)

$$\Sigma G \gtrsim \kappa c_s \leadsto \frac{\kappa c_s}{\Sigma G} \lesssim 1 \text{ (אי-יציבות)}$$

במידה ומדובר ב"לחץ" כוכבים - דהיינו דיספרסיה σ נקבל:

$$\frac{\kappa \sigma}{\Sigma G} \lesssim 1$$

בחישובים מדויקים מתקבל שהתנאי לאי יציבות הוא:

$$Q \equiv \frac{\kappa \sigma}{3.36\, \Sigma G} < 1$$

Q נקרא פרמטר Q של טומרה והקריטריון הוא הקריטריון שלו. (Toomre Criterion)

אם Q קטן, התנועה האפציקלית והלחץ לא יכולים להתגבר על הכבידה.

<u>זרועות גלקטיות:</u>

תנועה אפציקלית <u>מסודרת</u> של חלקיקים יכולה לתאר למשל זרועות גלקטיות.

כמו גלים בים (או כל דבר אחר), המבנה שרואים ושנע, אינו מתאר תנועה אמיתית של חומר אלא רק תנועה של פאזה.

כדי לראות כיצד מקבלים את קריטריון טומרה בצורה מסודרת, או כיצד נעים גלים בדיסקה, יש לחשב בצורה מסודרת את <u>יחס הדיספרסיה</u> של גלים בדיסקה בקירוב לינארי.

תנועה של גלים בדיסקה

משוואות התנועה של גלים מתקבלות ממשוואות ההידרודינמיקה הבסיסית. נחשב את יחס הדיספרסיה להפרעות קטנות. במבנים, הסיפור דומה אך מעט יותר מורכב.

שימור תנע - משוואת אוילר - נותנת:

תאוצה = כח גרב' ליח' מסה + כח פנימי (לחץ)

$$\underbrace{\frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\text{נגזרת לגרנז'יאנית שעוקבת אחר האלמנט}} + \underbrace{\overbrace{2\Omega_a\left(\hat{z}\times\vec{u}\right)}^{\text{קוריאוליס}} - \overbrace{\Omega_a^2\vec{r}}^{\text{צנטריפוגלי}}}_{\text{כוחות מדומים אם עובדים במערכת המסתובבת במהירות זוית } \Omega_a} = \overbrace{\nabla\psi}^{\text{פוטנציאל כבידה}} - \overbrace{\nabla h}^{\text{אנטלפיה}}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$$

האנטלפיה היא:

$$h = \int\frac{dp}{\rho} = \int\frac{\overbrace{c_T^2}^{\text{מהירות הקול האיזותרמית}}\,d\rho}{\rho} = \int\frac{c_T^2\,d\Sigma}{\Sigma}$$

בהנחה שההפרעה היחסית אינה תלויה ב- z.

המשוואה השניה היא משוואת הרציפות:

$$\frac{D\Sigma}{Dt} + \Sigma\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) = 0$$

נסתכל על הפרעות סביב מצב סטטי (סימטריה צילינדרית). סדר 0 יהיה:

$$-r\Omega_a^2 = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial r}$$

סדר 1 (הפרעה על סדר 0) יהיה:

$$\overbrace{u_r}^{\text{סדר } 1+0} = \overbrace{0}^{\text{אין סדר } 0} + \overbrace{u_r'}^{1}$$

$$u_\theta = \overbrace{r\underbrace{(\Omega-\Omega_a)}}^{\text{סדר } 0} + \overbrace{u_\theta'}^{\text{סדר } 1}$$

כי מסתכלים במערכת מסתובבת.

משוואות אוילר בקואורדינטות גליליות (פולריות) הן:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} - 2\Omega_a u_\theta - r\Omega_a^2 = \frac{\partial(\psi-h)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + 2\Omega_a u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial(\psi-h)}{\partial \theta}$$

לינאריזציה של המשוואות, בסדר 1:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\Omega-\Omega_a)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) u_r' - 2\Omega u_\theta' = \frac{\partial(\psi_1-h_1)}{\partial r}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\Omega-\Omega_a)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) u_\theta' + \underbrace{\left(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}\right)}_{\equiv \frac{\kappa^2}{2\Omega}} u_r' = \frac{1}{r}\frac{\partial(\psi_1-h_1)}{\partial \theta}$$

אפשר לראות מדוע זו התדירות האפיציקלית. נניח: $\psi_1, h_1 = 0$ ו- $\Omega = \Omega_a$

(כלומר, עובדים במערכת המסתובבת עם התנועה המעגלית).

$$\frac{\partial u_r'}{\partial t} = 2\Omega u_\theta' \qquad \frac{\partial u_\theta'}{\partial t} = -\frac{\kappa^2}{2\Omega} u_r'$$

(נגזור משוואה ראשונה ונציב משוואה שנייה:

$$\frac{\partial^2 u_r'}{\partial t^2} = 2\Omega \frac{\partial u_\theta'}{\partial t} = -\kappa^2 u_r'$$

$\Longrightarrow$ κ התדירות של התנודות סביב התנועה המעגלית.

השלב הבא הוא לינאריזציה של משוואת הרציפות.

$$\frac{D\Sigma}{Dt} + \Sigma \bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + (\bar{u}\cdot\bar{\nabla})\Sigma + \Sigma \bar{\nabla}\cdot\bar{u} = 0$$

לינאריזציה:

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} + (\bar{u}_1\cdot\bar{\nabla})\Sigma_0 + (\bar{u}_0\cdot\bar{\nabla})\Sigma_1 + \Sigma_1 \bar{\nabla}\cdot\bar{u}_0 + \Sigma_0 \bar{\nabla}\cdot\bar{u}_1 = 0$$

נציב את $u_0 = r(\Omega-\Omega_a)$ ונקבל:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\Omega-\Omega_a)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\Sigma_1 + v_r \frac{d\Sigma_0}{dr} + \frac{\Sigma_0}{r}\left(\frac{\partial (r u_r')}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta'}{\partial \theta}\right) = 0$$

לינאריזציה של אנתלפיה:

$$h = \int \frac{c_T^2\, d\Sigma}{\Sigma} \rightarrow h_1 = \int \frac{c_T^2\, \underbrace{d\Sigma_1}}{\Sigma_0} = c_T^2 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}$$

ל- $d\Sigma$ אין איבר 0 ולכן האיבר שמופיע בסדר 1.

<u>פתרון בצורת גלים:</u>

(נחפש פתרון מהצורה: $\exp(ik_r r + m\theta - \omega t)$

כמו כן, נסתכל בגבול של אורכי גל קצרים: $r|k_r| \gg 1$

נציב במשוואות, ונציג כ- exp(), ונקבל:

$$\text{אוילר}\begin{cases}(-i\omega + i(\Omega-\Omega_a)m)u_r' - 2\Omega u_\theta' = ik_r(\psi_1 - h_1)\\ (-i\omega + i(\Omega-\Omega_a)m)u_\theta' + \frac{\kappa^2}{2\Omega}u_r' = ik_\theta(\psi_1 - h_1)\end{cases}$$

$$\text{רציפות}\left\{(-i\omega + i(\Omega-\Omega_a)m)\Sigma_1' + \underbrace{u_r' \frac{d\Sigma}{dr}}_{\text{זניח. כמו הערה למטה (***)}} + \frac{\Sigma_0}{r}\left(\underbrace{u_r'}_{} + \underbrace{irk_r u_r'}_{} + imu_\theta\right) = 0\right.$$

זניח ביחס ל- r עבור גלים קצרים.

(***) כמו כן, $u_r' \frac{d\Sigma}{dr}$ מסדר גודל של $u_r' \frac{\Sigma}{r}$ והוא קטן בהרבה מ- $\Sigma k u_r'$

לכן:

$$\left[(-i\omega + i(\Omega-\Omega_a)m)\Sigma' + i\Sigma_0\left(k_r u_r' + \underbrace{\frac{m}{r}}_{\text{"}k_\theta\text{"}} u_\theta'\right)\right]$$

בנוסף: $h_1 = \frac{c_T^2 \Sigma_1'}{\Sigma_0}$

(נניח פשוט כי המסה מרוכזת בדסקה. משוואת פואסון תתן:

$$\nabla^2\phi_1 = 4\pi G\Sigma'\delta(z)$$

נבצע אינטגרציה על z:

$$\underbrace{\lim_{\zeta\to 0}\int_{-\zeta}^{\zeta}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}dz = \lim_{\zeta\to 0}\frac{d\phi_1}{dz}\Big|_{-\zeta}^{\zeta}}_{\text{מצד שני.}} = 4\pi G\Sigma'\int_{-\zeta}^{\zeta}\delta(z)\,dz = 4\pi G\Sigma'$$

מצד אחד.

כמו כן,
(ננחש פתרון מהצורה:

$$\phi_1 = \phi_a\exp\left(i(kx-\omega t)-|kz|\right)$$

אותו k

ה-k צריך להיות זהה כדי ש- $\nabla^2\phi_1=0$ מחוץ לדיסקה.

לכן:

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{d\phi_1}{dz}\Big|_{-\zeta}^{\zeta} = -2|k|\phi_a \overset{\text{מלמעלה}}{=} 4\pi G\Sigma'$$

לכן:

$$\left[\ \phi' = \phi_a = -\frac{2\pi G}{|k|}\Sigma'\ \right]$$

מציבים את ארבעת המשוואות הדינמיות ומקבלים יחס דיספרסיה (כי המשוואות הומוגניות):

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma_0|k| + c_s^2k^2$$

לכן:

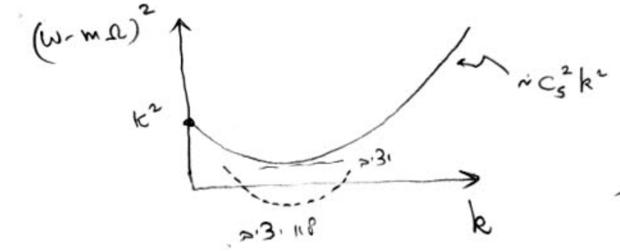
$$\omega = m\Omega \pm \sqrt{\underbrace{\kappa^2}_{\text{תנועה אפיציקלית}} - \underbrace{2\pi G\Sigma_0|k|}_{\text{כבידה}} + \underbrace{c_s^2k^2}_{\text{לחץ}}}$$

יציבות ω אינה תלויה ב- m.

κ, c_s — השפעה מייצבת. (k קטן - κ חשוב. k גדול - c_s חשוב)

Σ_0 — השפעה לא יציבות.

באופן גרפי:



← כשהמערכת נהיית לא יציבה, ישנו k סטציונרי לאי יציבות

תנאי לקבלת אי יציבות:

$$\sqrt{\ } = 0 \Rightarrow \kappa^2 - 2\pi G\Sigma_0|k| + c_s^2 k^2 = 0$$

$$\hookrightarrow k = \frac{2\pi G\Sigma_0 \pm \sqrt{(2\pi G\Sigma_0)^2 - 4c_s^2\kappa^2}}{2\kappa^2}$$

אי יציבות מתחילה כאשר: $\pi G\Sigma_0 = a\kappa$ או במילים אחרות:

$$Q = \frac{\kappa c_s}{\pi G\Sigma_0} \quad \begin{cases} >1 & \text{יציב} \\ <1 & \text{לא יציב} \end{cases}$$

בסביבת השמש:

$\kappa \simeq 32\ (\mathrm{km\,s^{-1}})/\mathrm{kpc}$

$\Sigma_0 \simeq 60\ M_\odot/\mathrm{pc}^2$

$a \simeq 30\ \mathrm{km/sec}$

$\hookrightarrow Q \simeq 1.2$

עם שגיאה גדולה (לפחות כמה עשרות אחוזים טובים).

מזה יכול להיות שדיסקאות שואפות ל- $Q \sim 1$.

$Q>1$ ← דיסקה יציבה ← קירור ← הקטנת Q ← אי יציבות.

$Q<1$ ← דיסקה לא יציבה ← יצירת כוכבים ← חימום ← יציבות.

אם נגדיר $\nu \equiv \frac{\omega - m\Omega}{\kappa}$ נקבל שיחס הדיספרסיה נותן:

$$\frac{|k|}{k_T} = \frac{2}{Q^2}\left\{1 \pm \left[1 - Q^2(1-\nu^2)\right]^{1/2}\right\}$$

כאשר: $k_T = \frac{\kappa^2}{2\pi G \Sigma_0}$ הוא הוקטור גל הכי לא יציב.

אנו רואים כי ישנם שני "ענפים" - גלים קצרים עם "+" - k גדול
וגלים "ארוכים" עם "-" ו- k קטן.

בגבול של k גדול, הגלים הקצרים הם למעשה גלים מקומיים.
הזרועות הגלקטיות מתוארות בדרך כלל ע"י הגלים הארוכים.

אנו רואים שהגלים יכולים להתקיים רק באזור: $1-\nu^2 > 0$ כדי ש- $|k|$ ממשי

$\nu = \pm 1$ נקראים ה- lindblad resonances

נהוג להגדיר $\Omega_p = \frac{\omega}{m}$ כך ש-

$$X = X_a \exp\left(ik_r r + im\theta - \omega t\right)$$
$$= X_a \exp\left(ik_r r + im(\theta - \Omega_p t)\right)$$

ואז, הרזוננסים של לינדבלד הם:

חיצוני - $\Omega + \frac{\kappa}{m} = \Omega_p$

פנימי - $\Omega - \frac{\kappa}{m} = \Omega_p$

גלים "ארוכים" (ומסתבר שגם גלים קצרים בדיסקיות כוכבים) יכולים להתקיים רק בין רזוננסי לינדבלד.