פרופ' ניר שביב

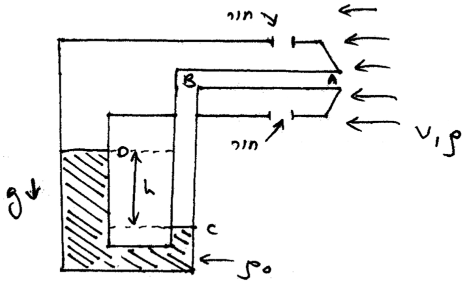
מכניקת הרצף 77606

מבחן לדוגמא, סמסטר אביב תשס"ז

- המבחן הוא ללא כל חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
  - 2 דפי נוסחאות (4 עמודי A4) (בנוסף לדפי הנוסחאות הבאים עם הבחינה).
  - מחשבון
- יש לנמק את התשובות. תשובה לא מנומקת לא תתקבל.
- משך המבחן שעתיים.
- יש לענות על ארבע מתוך חמש השאלות.

בהצלחה!

1. נתונה מערכת המתוארת בציור (הנקראת צינור פיטו). היא משמשת כמכשיר למדידת מהירות זורמים. ע"י הפניית הצינור AB לכיוון הזרם, נוצר הפרש גבהים בצינור CD הממולא כספית. צפיפות הנוזל והכספית הם ρ ו- ρ_0 בהתאמה. ניתן להניח כי $\rho_0 \gg \rho$.



חשבו את מהירות הנוזל v כתלות ב- g, ρ, ρ_0 ו- h.

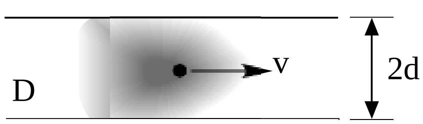
2. נתונים שני גלילים אינסופיים בעלי ציר משותף, ברדיוסים R_1, R_2 $(R_2 > R_1)$, המסתובבים סביב צירם במהירויות זוויתיות Ω_1, Ω_2. החלל ביניהם מלא בזורם צמיג בלתי דחיס. כמו כן, המערכת לא נמצאת תחת השפעת הגרוויטציה.

מהי התפלגות המהירויות בזורם?

3. נתון מקור קווי λ של חלקיקים (מספר ליח' זמן ליח' אורך). המקור נע במהירות v בניצב לציר המקור. החלקיקים מבצעים דיפוזיה עם מקדם דיפוזיה D. כמו כן, רצוי להשאיר תוצאות סופיות עם אינטגרלים או סכומים.

(א) למה שווה ההתפלגות המרחבית של צפיפות החלקיקים בזמן נתון?

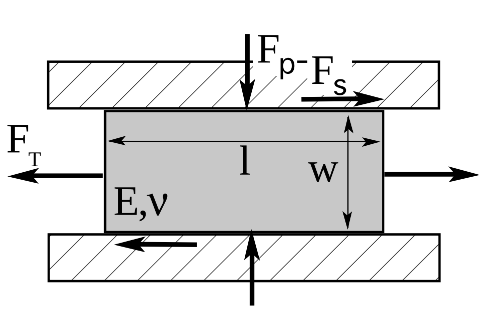
(ב) אם במרחק $\pm d$ מציר המקור, בכיוון הניצב לתנועה ישנם שני מישורים המכתיבים שצפיפות חלקיקים שווה לאפס (דהיינו, הקירות הינם בולעים אידאלי-ים). למה שווה ההתפלגות המרחבית?



(לידע כללי, הבעיה מתארת את דיפוזית הקרינה הקוסמית מזרוע בשביל החלב)

4. נתון מיכל מלבני, בגודל $1m \times 1.5m$. המיכל ממולא במים עד גובה של $1cm$. מצאו, בקירוב, את שלוש התדירויות הנמוכות ביותר של גלי המים במערכת.

5. נתונה תיבה בגודל $l \times l \times w$. בציר z היא נלחצת בכח F_p ומופעל עליה כח גזירה F_s. בשני הצירים האחרים, מופעלת מתיחות F_T. החומר ממנו עשויה התיבה הוא בעל מודול אלסטי של יאנג E ויחס פואסון ν.



מצאו את שינוי הנפח היחסי של התיבה.

In spherical polar coordinates r, ϕ, θ we have for the stress tensor

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right),$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi \cot\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\phi r} = \eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r}\right),$$

while the Navier–Stokes equations are

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})v_r - \frac{v_\theta{}^2 + v_\phi{}^2}{r}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\triangle v_r - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} - \frac{2v_r}{r^2}\right],$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi{}^2\cot\theta}{r}$$
$$= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left[\triangle v_\theta - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right],$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})v_\phi + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r}$$
$$= -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} + \nu\left[\triangle v_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right],$$

where

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi},$$

$$\triangle f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} = 0.$$

The equation of continuity is

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} = 0.$$

In cylindrical polar coordinates r, ϕ, z components of the stress tensor are

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \sigma_{r\phi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r}\right),$$

$$\sigma_{\phi\phi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r}\right), \qquad \sigma_{\phi z} = \eta\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}\right),$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \sigma_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right).$$

The three components of the Navier–Stokes equation are

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})v_r - \frac{{v_\phi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\triangle v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})v_\phi + \frac{v_r v_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \nu\left(\triangle v_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\triangle v_z,$$

where

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi} + v_z\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\triangle f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

The equation of continuity is

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Strain in spherical coordinates

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r}\cot\theta + \frac{u_r}{r},$$

$$2u_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}, \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},$$

$$2u_{\phi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}.$$

In cylindrical co-ordinates r, ϕ, z,

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2u_{\phi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2u_{r\phi} = \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi}.$$

Relation between stress & strain
(E=Young's modulus, σ=Poisson's ratio)

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right).$$

$$u_{ik} = [(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ik}]/E.$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy}+u_{zz})],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{yy} + \sigma(u_{xx}+u_{zz})],$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx}+u_{yy})],$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\sigma}u_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\sigma}u_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\sigma}u_{yz},$$

$$u_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})],$$

$$u_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})],$$

$$u_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})],$$

$$u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy}, \quad u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xz}, \quad u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E}$$