אנליזת מימדים – משמעות מספר ריינולדס.

נסתכל על משוואת נביאר-סטוקס:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}$$

נעבור לעבוד עם יחידות המבוססות על גדלים אופייניים בבעיה:

$x = l\tilde{x}$ — l – גודל אופייני בבעיה.

$v = U\tilde{v}$ — U – מהירות אופיינית

$t = \tilde{t}\cdot l/U$ — t – זמן אופייני $= l/U$

$P = \tilde{p}\cdot P_0$ — P_0 – לחץ אופייני

נקבל אם כן את המשוואה:

$$\frac{U^2}{l}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{U^2}{l}(\tilde{\vec{v}}\cdot\underbrace{\tilde{\vec{\nabla}}}_{\partial/\partial\tilde{x}})\tilde{\vec{v}} = -\frac{P_0}{l\underbrace{\rho_0}_{\text{נניח כי הנוזל בלתי דחיס.}}}\tilde{\vec{\nabla}}\tilde{p} + \frac{\nu U}{l^2}\Delta\tilde{v}$$

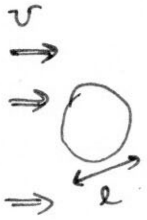
נחלק ב U^2/l ונקבל:

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = -\underbrace{\frac{P_0}{\rho U^2}}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \underbrace{\frac{\nu}{Ul}}\Delta\tilde{v}$$

- אנו מקבלים פקטור $\frac{P_0}{\rho U^2}$ לפני הלחץ, זהו גודל חסר יחידות שאומר כמה הלחץ חשוב יחסית לצפיפות אנרגיה קינטית בבעיה.
- הפקטור השני שמופיע הוא מספר ריינולדס (Reynolds): $Re \equiv \frac{Ul}{\nu}$

מספר ריינולדס מתאר כמה חשוב איבר האינרציה לעומת איבר הדיסיפציה

עוד על משמעות מספר ריינולדס



אם ישנו גוף בגודל אופייני l. מהו הזמן שלוקח לזרימה לעבור את הגוף?

$$\tau_{Inertia} \sim l/v$$

מאידך גיסא, מהו הזמן שיקח לתנע לעשות דיפוזיה ולהשפיע על הגודל l?

משוואת דיפוזיה (של התנע) נראית: $\frac{\partial v}{\partial t} \approx \nu \Delta v \Leftarrow \frac{v}{\tau_{diff}} \sim \nu \frac{v}{l^2} \Leftarrow$

$$\tau_{diff} \sim l^2/\nu$$

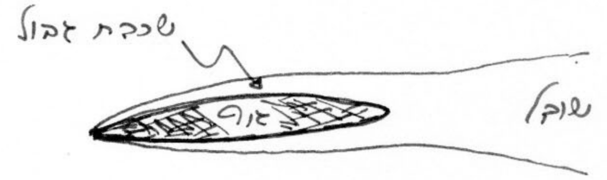
מהו היחס בין הזמנים הללו?

$$\frac{\tau_{diff}}{\tau_{inertia}} \sim \frac{l^2}{\nu} \Big/ \frac{l}{v} = \frac{vl}{\nu} \equiv Re$$

כלומר, מספר ריינולדס הוא היחס בין הזמן שלוקח לתנע לעבור בין צד אחד של המערכת לצד השני לעומת הזמן שלוקח לתנע לעבור ע"י האינרציה של המערכת.

ואם מספר ריינולדס גדול, הדיפוזיה אינה יכולה לשחק תפקיד!

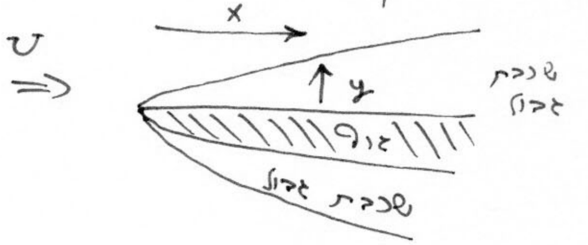
למרות שהצמיגות אינה חשובה על סקלת מרחק l, אם נתקרב אל הגוף נגיע למרחק מספיק קטן עבורו מספר ריינולדס כן יהיה קטן. לכן, קרוב לגוף נצפה לראות שכבת גבול שבה הצמיגות כן חשובה.



מהו גודל שכבת הגבול?

פרנדל (Prandtl) הראה שזרימה מסביב לגוף ניתנת לתאור כזרימה <u>אידיאלית</u>, ללא צמיגות, במרחקים בהם $Re(l) \gg 1$ ואיזור של שכבת גבול בו הצמיגות חשובה.

אם נסתכל על הצמיגות כדיפוזיה, נוכל להעריך את גודל השכבה.



הזמן שלוקח לנוזל להגיע עד מרחק x מקצה הגוף הוא: $\tau \sim x/v$

במשך זמן זה, תהליך הדיפוזיה יכול להעביר את "האינפורמציה" על התנע מתנאי השפה עד למרחק $y \sim \sqrt{\nu\tau} \sim \sqrt{\nu x/v}$

לכן אנו מצפים כי שכבת הגבול תגדל כמו שורש המרחק מן הקצה.

גם מאחורי הגוף, נצפה כי השובל ה<u>למינרי</u> ימשיך לגדול כמו $\sqrt{x}$.

<u>חישוב הכח על גוף ע"י שטף התנע ב-∞.</u>

נחשב כעת את שטף התנע ה-∞. שטף זה יתן לנו את הכח שהזרימה מפעילה על הגוף.

$$\underbrace{F_i}_{\text{רכיב } i \text{ של הכח}} = \underbrace{\int}_{\text{אינטגרציה על משטח רחוק}} \underbrace{\Pi_{ik}}_{\text{שטף התנע}} ds_k$$

הסיבה שאינטגרל זה הוא הכח על הגוף למרות שהאינטגרציה היא על משטח רחוק, היא החוק הג' של ניוטון... הכח שהנוזל מפעיל על הנוזל שמחוץ למשטח הוא שווה בגודלו אך הפוך לכח שמפעיל הנוזל על הגוף. הסדר הזה שתנע לא הולך לאיבוד בתוך הנוזל... (אלא אם כן פועל עליו כח חיצוני כמו - g).

ובכן, למה שווה האינטגרל?

$$\Pi_{ik} = p\,\delta_{ik} + \rho v_i v_k = (p_0+p')\delta_{ik} + \rho(v_i+v_i')(v_k+v_k')$$

נפריד לחלק לא מופרע + הפרעה.

אנו מניחים כי החלק המופרע קטן ביחס לערכים הלא מופרעים באיזור בו מבצעים את האינטגרציה.

ובכן, נוכל להחליף את האינטגרלים למשטח אחרים. חלקם מתאפסים:

$$\int p_0 \delta_{ik}\, ds_k \underset{\uparrow}{=} \Big(\underbrace{\oint p_0\, d\vec{s}}_{} \Big)_i = 0$$

נושים בכתיב וקטור:

לחץ קבוע אינו מפעיל כח על משטח סגור

כמו כן:

$$\oint \rho U_i v_k\, ds_k = U_i \underbrace{\oint \rho\, v_k\, ds_k}_{} = 0$$

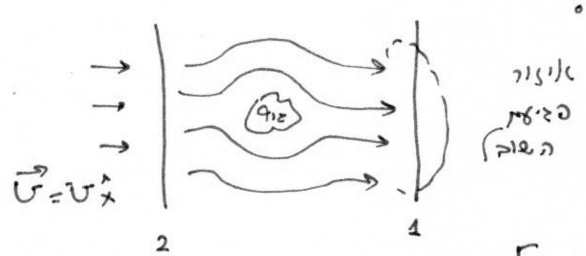
נטו שטף מסה דרך המשטח = 0

שימו לב כי $\int$ זה אינו שווה - $U_k \oint \rho v_i\, ds_k \neq 0$ שאינו מתאפס!

כמו כן, אנו מזניחים את האיברים סדר שני $\oint \rho v_i v_k ds_k$, כך שאנו מקבלים לבסוף:

$$F_i = \oint \Pi_{ik}\, ds_k = \oint (p'\delta_{ik} + \rho U_k v_i')\, ds_k$$

נבחר לבצע את האינטגרציה על שני מישורים 1 ו-2 משני צידי הגוף, במרחק סופי ביניהם. נסגור את המשטח ב- $\infty \to z, y$:



מה יהיה הכח בכיוון ציר $\hat{x}$?

$$F_x = \Big(\underbrace{\iint_1 - \iint_2}_{}\Big)(p' + \rho U v_x)\, dy\, dz$$

ישנו שוני בפרמטרים סדר I רק באיזור השובל:

$$= -\iint_{\text{שובל}} (p' + \rho U v_x)\, dy\, dz$$

באותה דרך, נקבל:

$$F_y = -\iint_{\text{שובל}} \rho U v_y\, dy\, dz = -U\rho \iint v_y\, dy\, dz$$

נוכל לרשום את $\int v_y dy$ כאינטגרל על כל המסלול המקיף את הגוף (שמכיוון ש-v_y שונה מ-0 רק באיזור השובל:

$$\int_{\text{שובל}} v_y\, dy = \oint v_y\, dy \equiv \underbrace{\Gamma_z}(z)$$

מסלול שמקיף את הגוף

הסירקולציה סביב z שתלויה בקואו' z של המישור הניצב לזו מתוספת הסירקולציה.

לכן:

$$\Rightarrow F_y = -U\rho \int \Gamma_z(z)\, dz$$

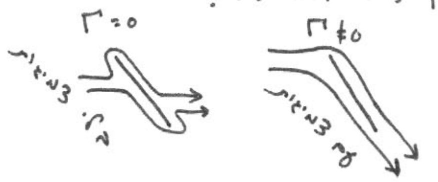
ליחי' אורך:

$$\underline{\underline{F_y = -U\rho\Gamma}}$$ (ליחי' אורך

המסקנה המתבקשת היא שכדי לקבל עילוי אנו צריכים סירקולציה Γ.

אולם, ראינו בעבר כי אם הסירקולציה שווה ל-0 במצב התחלתי של זרימה אידיאלית, כי אז הסירקולציה תשאר 0. לכן, מקור הסירקולציה הוא המקום היחיד בו הזרימה אינה אידיאלית - בשכבת הגבול היכן שהצמיגות משחקת תפקיד חשוב.

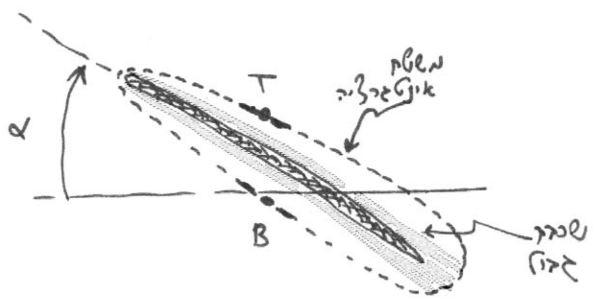
אם לא היתה הצמיגות, לא היינו יכולים לקבל סירקולציה וגם עילוי.



עילוי על כנף דקה

ראינו כיצד העילוי קשור לסירקולציה, ע"י בחינת הזרימה במרחקים גדולים.

כעת, נבחן כנף דקה וננסה לחשב ישירות את העילוי, ע"י אינטגרציה על הפרש הלחצים בין שני צידי הכנף.



נניח כי הכנף דקה. הנחה זו מאפשרת לנו להשוות שתי נקודות T ו- B אחת לשניה כשאלמנט האורך dx זהה בשניהם.

הנחה זו גם מאפשרת למהירות הזרימה להיות קרובה למהירות ב-∞, בתנאי כמובן שזווית ההתקפה α קטנה גם כן. לכן נניח גם $\alpha\ll1$.

ובכן, מהו הפרש הלחצים?

$$P_B-P_T=\frac{1}{2}\rho\left(u_T^2-u_B^2\right)=\frac{1}{2}\rho\left(u_T+u_B\right)\left(u_T-u_B\right)$$

ברנולי: $p+\frac{1}{2}\rho u^2=\text{const}$

אולם: $u_B=U+u'_B$, $u_T=U+u'_T$, $|u'|\ll|U|$

ולכן:

$$P_B-P_T\cong\frac{1}{2}\rho\cdot2U\left(u_T-u_B\right)$$

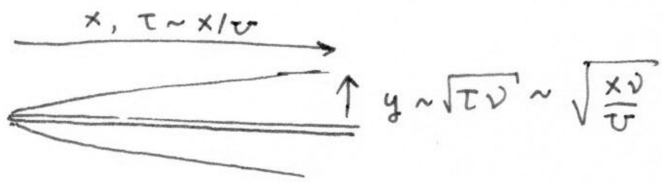
ואז נקבל:

הכח ליח' רוחב של הכנף: $$\Sigma F_y=\int_0^l\left(P_B-P_T\right)dx\cong\int_0^l\rho U\left(u_T-u_B\right)dx=\rho U\int^l\left(u_T-u_B\right)dx$$

$$=-\rho U\Gamma$$

$\rightarrow$ כמו מקודם!

ראינו כי גוף הנע בתוך נוזל יפתח שכבת גבול ושובל. שכבת הגבול תגדל כמו:

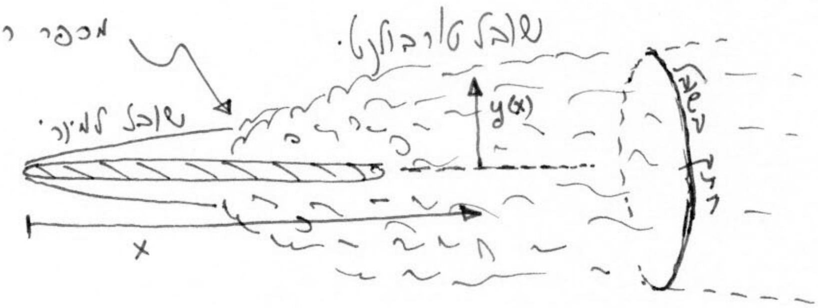


אנו מצפים כי מספר ריינולדס שמוגדר ע"י רוחב השכבה יגדל בצורה הבאה:

$$R(y) \equiv \frac{y U_x}{\nu} = \sqrt{\frac{x\nu}{U}}\,\frac{U}{\nu} = \sqrt{\frac{xU}{\nu}} = \sqrt{Re(x)}$$

ז.א. מספר ריינולדס של השכבה הוא שורש ממספר ריינולדס שמוגדר ע"י המרחק לאורך המישור מתחילתו.

היות ומספרי ריינולדס של כמה מאות $Re \sim$ few 100 דרוש על מנת להפוך זרימה לבלתי יציבה נקבל שכאשר $Re(x) \sim 10^5\text{-}10^6$ ה- $Re(y)$ יהיה קריטי ונקבל שכבת גבול ושובל טורבולנטיים.



ראינו שכדי לקבל עילוי, דרושה סירקולציה, אותה נמצא בשובל. שאלות מעניינות נוספות שכדאי לענות עליהן הן:

* מהו הרוחב של השובל $y(x)$ בשובל למינרי (נוכל לפתור במדויק)
* ומהו $y(x)$ באיזור הטורבולנטי? (נוכל לפתור רק ע"י שיקולים פשוטים).

סה"כ נקבל:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = U\frac{dU}{dx}$$

את השוויון האחרון קיבלנו ע"י שימוש בברנולי עבור האוויר שמחוץ לשכבת הגבול:

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = const \rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$$

– מהו הפתרון לשכבת הגבול עבור המקרה הפרטי בו המהירות ב-∞ היא אחידה?

במקרה זה, $dU/dx = 0$ ונקבל את המשוואה:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$$

עם משוואת הרציפות:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

תנאי השפה הם: $v_x = v_y = 0 \big|_{y=0}$ ו- $v_x \to U_0 \; ; \; y \to \infty$

כדי לפשט את המשוואות, נעבור לעבוד עם פונקצית זרימה: $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$

הסיבה היא שכך אנו מקיימים את משוואת הרציפות באופן מיד: $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

נקבל:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

ראינו מקודם כי שכבת הגבול גדלה עם x לפי $y \sim \sqrt{\nu x / U}$

לכן ננחש פתרון שתלוי רק בגודל חסר יחידות ξ:

$$\xi = y \Big/ \sqrt{\nu x / U}$$

הסיבה היא שאין סקלה אחרת שיכולה להכנס לפתרון (זכרו, המישור הוא חצי אין-סופי)

בכל מקרה, אחרי שנציב את הניחוש במשוואה, אם הניחוש לא היה נכון אז נגלה כי הוא אינו יכול לקיים את המשוואות.

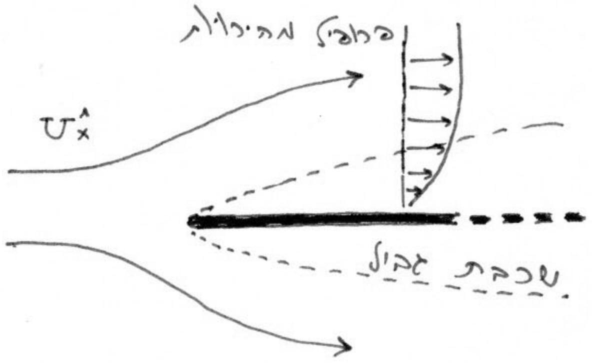
פונקציה כלשהי: מצד שני

מהניחוש:

$$v_x = U\tilde{f}(\xi) = +\frac{\partial \psi}{\partial y}\Big|_x = +\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\Big|_x \frac{d\xi}{dy}\Big|_x = +\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\Big|_x \sqrt{U/\nu x}$$

ז.א. נקבל:

$$\psi = f(\xi)\sqrt{\nu x U}$$



שכבת הגבול הלמינרית

כעת, נשתמש במשוואות נביאר-סטוקס לזורם בלתי דחיס וללא תלות בזמן כדי לתאר את שכבת הגבול הלמינרית. פתרון פרופיל המהירות יאפשר לנו לחשב גדלים שונים כמו כוח הגרר על המישור.

משוואות N.S. עבורנו היא:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)$$

ואלו משוואות הרציפות עבור נוזל בלתי דחיס:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

אנו מניחים כי מספר ריינולדס אינו מאוד קטן, ולכן השכבת גבול והשובל יהיו צרים ביחס לאורך המעטפת. $\partial/\partial y$ יותר חשוב מ- $\partial/\partial x$.

ממשוואות הרציפות ניתן לראות אם כן כי $v_y \ll v_x$.

אם נרשום משוואה ל- $\partial p/\partial x$ ומשוואה ל- $\partial p/\partial y$ נראה שכל איבר עבור $\partial p/\partial x$ ניתן להשוואה עם איבר אחר ב- $\partial p/\partial y$ שהוא אקוויולנטי אך מכיל v_y במקום v_x.
לכן נצפה כי $\partial p/\partial y \ll \partial p/\partial x$ באותו יחס של v_y/v_x.

משמעות הדבר היא כי ניתן להניח בקירוב $\partial p/\partial y = 0$, ז"א הלחץ בנקודה x,y בשכבה תלוי רק ב- x, והוא יהיה נתון ע"י הלחץ ב- y גדול, מחוץ לשכבת הגבול!
כמו כן, $\partial^2/\partial y^2$ הרבה יותר חשוב מ- $\partial^2/\partial x^2$.
אולם, לא ניתן להזניח את $v_x \frac{\partial}{\partial x}$ לעומת $v_y \frac{\partial}{\partial y}$ כי בשניהם ישנו גודל קטן כפול גודל גדול.

נוכל לגזור את ψ ונקבל:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left.\frac{d\psi}{d\xi}\right|_x \frac{d\xi}{dy} = U f'(\xi)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\sqrt{\nu x U}\, f\left(y\sqrt{U/\nu x}\right)\right)}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\nu U/x}\,\left(\xi f' - f\right)$$

אם מציבים את v_x, v_y (או ψ) במשוואות שכבת הגבול:

נקבל אחרי מעט עבודה:

$$f f'' + 2 f''' = 0$$

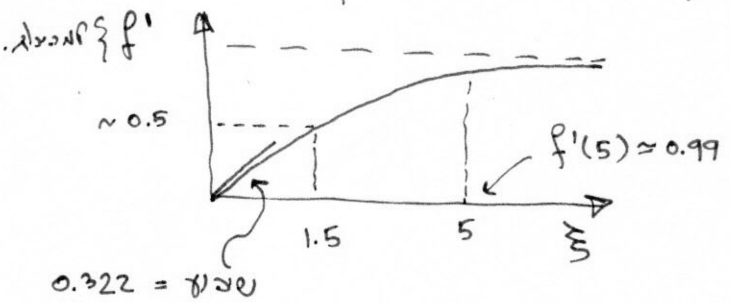
תנאי השפה הם:

$$v_x(y=0)=0 \longrightarrow f'(0)=0$$

$$v_y(y=0)=0 \longrightarrow f(0)=0$$

$$v_x(y\to\infty)=U \longrightarrow f(\infty)=1$$

למשוואה הנ"ל אין פתרון אנליטי, אולם ניתן לפתור אותה נומרית ולקבל פונקציה כמתואר בגרף:



כח הגרר ליח' שטח יהיה:

$$\sigma_{xy} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \overbrace{\frac{\partial v_y}{\partial x}}^{\text{זניח}}\right) = \eta \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|_{y=0}$$

$$= \eta\left(U/\nu x\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = \eta\left(\frac{U^3}{\nu x}\right)^{1/2} \underbrace{f''(0)}_{0.322}$$

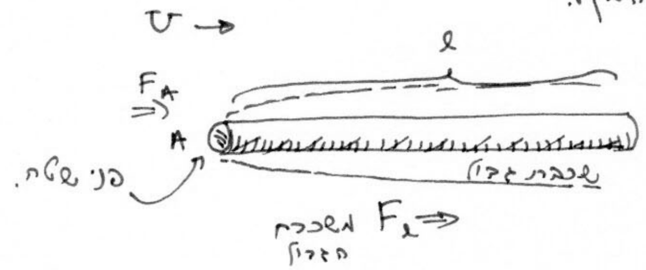
הכח הכולל ליח' רוחב יהיה על כן:

שני צדי המישור

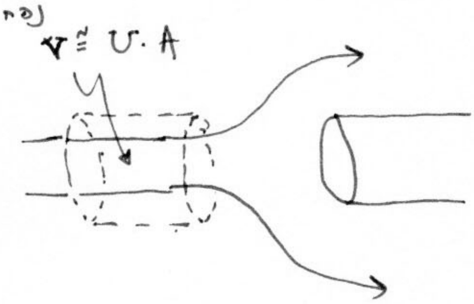
$$\underbrace{F_d}_{\text{כח גרר ליח' רוחב}} = 2\int_0^l \sigma_{xy}\, dx = 1.328\sqrt{\eta \rho l U^3}$$

כח גרר על מקל:

ננסה להעריך מהו הכח גרר על מקל שנע אופקית. נוכל להפריד את הכח לשני רכיבים. רכיב אחד שנובע מהכח על פני המקל ורכיב שני מהכח שנוצר משכבת הגבול שבאורכו של המקל.



מהו F_A על פני השטח? במהירויות גבוהות, כשמספר ריינולדס גדול, הצמיגות אינה משפיעה על אופי הזרימה. והכח נובע מהעובדה שאנו מזיזים את הזרימה הצידה.



ביח' זמן הנפח שנמצא בתוך $V \cong v \cdot A$ מוזז הצידה ולכן יש להעביר לו תנע של:

$$\frac{dp}{dt} \cong F \cong \underbrace{V \cdot \rho}_{\text{כמות מסה ליח' זמן}} \cdot \underbrace{v}_{\text{תנע ליח' מסה}}$$

לכן הכח יהיה:

$$F_A \cong \rho v^2 A$$

במציאות, לא ניתן לחשב את קבוע הפרופורציה במדויק (רשום רק):

$$F_A = \tfrac{1}{2}\alpha \rho v^2 A = \frac{\pi}{2}\alpha\rho v^2 r^2$$

הסטנדרטית

(הפקטור $\frac{1}{2}$ הוא כדי שנהיה קונסיסטנטיים עם ההגדרה של מקדם גרר).

מהו הגרר משכבת הגבול לאורך המוט?

$$F_l \cong \underbrace{2\pi r}_{\text{היקף}}\,\beta\sqrt{\eta\rho l v^3} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\beta\sqrt{\eta\rho l v^3}}{\cancel{\pi}\,\rho v^2 r}\,\frac{\pi}{2}\rho v^2 r^2$$

(רשום בצורה הדומה לגרר סטנדרטי).

$$F_l \cong 2\beta\sqrt{\frac{\nu l}{v r^2}}\,\tfrac{1}{2}\rho v^2 A$$

אפשר אם כן לרשום את הגרר הכולל כ-

$$F_{TOTAL} = \overbrace{\Big(\alpha + 2\beta \underbrace{\sqrt{\frac{\nu}{Uh}}}_{Re(h)^{-1/2}} \sqrt{\frac{l}{h}}\Big)}^{C_D \equiv \text{מקדם הגרר}} \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

נקח לדוגמא מקל באורך מטר וקוטר של 1cm, ובמהירות של $U = 10\ m/sec$

נראה שהאיבר השני הוא:

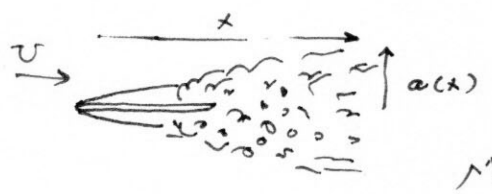
$$Re(h) = \frac{U \cdot r}{\nu} \simeq \frac{10 m/s \cdot 0.005 m}{1.5 \times 10^{-5} m^2/sec} \cong 3000$$

$$\Rightarrow 2\beta \, Re(h)^{-1/2} \cdot \sqrt{l/r} \simeq \beta \cdot 0.3$$

ז"א. האיבר השני יהיה קטן בכחצי סדר גודל מהאיבר הראשון.

השובל הטורבולנטי:

ראינו כי אם מספר ריינולדס של השכבה הלמינרית יהיה קריטי, כי אז היא תהיית טורבולנטית. נוכל לשאול שאלות על השובל שנוצר.



מהו רוחב השובל $a(x)$?

האם הוא חוזר להיות למינרי? (מצד אחד, המהירות קטנות עם המרחק, מאידך גיסא, עובי השובל גדל, כך שלא ברור מראש מה חשוב יותר.

נניח כי את המהירות בשובל ניתן לתאר כמהירות הלא מופרעת (ב-∞) U פלוס רכיב אקראי. $\vec{U} + \underbrace{\vec{u}'}_{\text{אקראי}}$

היות והמהירות האופיינית בכיוון $\hat{y}$ היא u' ומזו כל השובל נסחף במורד הזרם במהירות U, נצפה כי השובל יגדל כמו:

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{u'}{U}$$

בשבוע שעבר ראינו כי ניתן לחשב את הכוחות על הגוף בעזרת אינטגרציה על השובל, במרחקים גדולים מהגוף:

$$F_i \simeq \int \rho U u_i \, ds \simeq \rho U u' a^2$$

על השובל

(למשל כח העילוי).

אולם, הכח אינו תלוי במרחק מהגוף כי אנו בוחרים לבצע את האינטגרציה

לכן ניתן לרשום את u' בעזרת הכח הקודם:

$$u' \sim \frac{F}{\rho U a^2}$$

נציב זאת במשוואה עבור da/dx:

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{u'}{U} \sim \frac{F}{\rho U^2 a^2}$$

$$a^2 da \sim \frac{F}{\rho U^2} dx \Rightarrow a^3 \sim \frac{Fx}{\rho U^2} \Rightarrow a \sim \left(\frac{Fx}{\rho U^2}\right)^{1/3}$$

$a \propto x^{1/3}$

אנו רואים כי השובל הטורבולנטי גדל כמו

(בשונה מהשובל הלמינרי, שגדל כמו $x^{1/2}$).

המהירות תקטן עם המרחק:

$$u \sim \left(\frac{F U}{\rho x^2}\right)^{1/3}$$

ואילו מספר ריינולדס בשובל יקטן גם כן

$$Re \sim \frac{a u'}{\nu} \sim \frac{F}{\nu \rho U a} \sim \left(\frac{F^2}{\rho^2 U x \nu^3}\right)^{1/3}$$

ז"א. במרחק מספיק גדול, השובל נהיה למינרי.

טורבולנציה וספקטרום קולמוגורוב

בעית הטורבולנציה אינה פתורה. אולם, ניתן בכל זאת להגיע לכמה מסקנות מעניינות ע"י אנליזות מסובכות יותר או מסובכות פחות. בשנות ה-40, קולמוגורוב ואובוחוב (Kolmogorov and Obukhov) הראו שניתן משיקולים בסיסיים לקבל את ספקטרום האנרגיה - כמה אנרגיה יש (או כמה מבנה, או אילו מהירויות אופייניות יש) על סקלות שונות.

ב- 1922 הבין Richardson כי בטורבולנציה יש יצירה של מבנה על סקלות גדולות ומבנה זה אט אט "מחלחל" לסקלות קטנות יותר ויותר עד שהוא מגיע לסקלה במספר ריינולדס מספיק קטן כדי לקבל את הדיסיפציה.

ז"א. ישנה יצירת אנרגיה על סקלה l עבורה $Re(l) \gg 1$ וסקלת דיסיפציה λ_{dis} עבורה $Re(\lambda_{dis}) \sim 1$.

ובכן, כמה דיסיפציה יש לנו על סקלות גדולות? הרי הסקלות הגדולות אינן "רואות" את הדיסיפציה (היא חשובה רק על סקלות λ_{dis}), קצב הדיסיפציה יכול להיות תלוי רק בגדלים המיקרוסקופיים: l - סקלת המערכת, u - המהירות האופיינית ו- ρ צפיפות החומר.

הדיסיפציה אותה אנו מחפשים ε היא קצב איבוד אנרגיה ליח' מסה,

ז"א. אנרגיה ליח' זמן ליח' מסה: $[\varepsilon] = erg\ s^{-1} gr^{-1} = cm^2 sec^{-3}$

הדרך היחידה שאנו יכולים לקבל גודל כזה ע"י קומבינציה של גדלים מקרוסקופיים היא:

$$\varepsilon \sim \frac{u^3}{l}$$

באותה דרך גודל הלחץ היחיד שאנו יכולים ליצור הוא:

$$\Delta p \sim \rho u^2$$

על אותו משקל, אנו יכולים להסתכל על סקלות ביניים $\lambda_{dis} < \lambda < l$

סקלה זו לא תראה את הסקלה הגדולה וגם לא את הסקלה הקטנה.

הדבר היחידי שהיא "תראה" הוא את הדיסיפציה של אנרגיה ε.

דיסיפציה זו מגיעה מסקלות גדולות יותר (דמקור מ- l) ומועברת לסקלות

קטנות יותר.

ובכן, מה המהירות האופיינית של האורך של סקלה λ? הגדלים היחידים

שמאפייני- סקלה זו הם הדיסיפציה הקריטית ε ואורך אופייני λ:

$$v_\lambda \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3} \quad \Big\} \text{ קומבינציה יחידה}$$

כלו׳ המהירות האופיינית של סקלה קטנה יותר, קטנה כמו $\lambda^{1/3}$.

דרך נוספת אחרת להסתכל על זה:

$$\varepsilon \sim \frac{u^3}{l} \overset{\varepsilon \text{ קבוע}}{\sim} \frac{v_\lambda^3}{\lambda} \Rightarrow v_\lambda \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3}$$

מה אורך סקלת הדיסיפציה?

$$R_{\lambda_{dis}} \sim 1 \Rightarrow \frac{\lambda_{dis} v_{dis}}{\nu} \sim 1 \Rightarrow \frac{\lambda_d \cdot \varepsilon^{1/3} \lambda_d^{1/3}}{\nu} \sim 1$$

ואם נציב את ε בעזרת הגדלים המקרוסקופיים: $\frac{\lambda_d^{4/3} u}{\nu l^{1/3}} \sim 1$

$$\hookrightarrow \lambda \sim \left(\frac{\nu l^{1/3}}{u}\right)^{3/4} \sim \frac{l}{Re(l)^{3/4}}$$

ריצת אדם: $v \sim 1 m/sec$, $l \sim 1m$, $\nu \sim 1.5\times10^{-5} m^2/sec$ $\Leftarrow$ $Re \sim 6\times10^4$

לכן: $\lambda_d \sim \frac{1000mm}{(6\times10^4)^{0.75}} \sim 0.25 mm$