דמיות ומשוואות נבייר - סטוקס

הבנה אינטואיטיבית של דמיות - "דיפוזיה של תנע"

כדי להבין מה דמיות, נתחיל בלהבין מה דיפוזיה. נסתכל על דיפוזיה של חומר שצפיפותו נתונה ע"י n. מה קורה אם בשני תחומים סמוכים ישנה צפיפות שונה?

נקבל שטף משמאל לימין ומימין לשמאל:

$$\Phi_+ \sim \frac{n_-}{2} v_{th} \qquad \Phi_- \sim \frac{n_+}{2} v_{th}$$

v_{th} היא המהירות הטיפוסית (המהירות התרמית). הפקטור $1/2$ מופיע כי רק חצי מהחלקיקים נעים בכיוון המהירות... הפקטור האמיתי הוא כמובן שונה מ-$1/2$, והסיבה האמיתית היא כדי שהוא יתקזז עם פקטור 2 אחר :)

השטף נטו הוא:

$$\Phi = \Phi_+ - \Phi_- \simeq \left(\frac{n(x-l)}{2} - \frac{n(x+l)}{2}\right) v_{th}$$

$$\simeq -\frac{\partial n}{\partial x}\, l\, v_{th}$$

l הוא המרחק הממוצע שעוברים החלקיקים ("הדרך החופשית הממוצעת"). כלומר ניתן לכתוב

$$\vec{\Phi} = -D\vec{\nabla} n$$

$$D \sim l\, v_{th}$$

D נקרא מקדם הדיפוזיה ולו יש יחידות של cm^2/sec. החוק שנותן כי השטף יחסי לגרדיאנט הצפיפות נקרא חוק פיק (fick).

ממשוואת שימור החומר מתקבל כי

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\Phi} = +D\Delta n$$

זוהי משוואה פרבולית שנקראת משוואת הדיפוזיה.

במקום לדבר על צפיפות החלקיקים, יכולנו לדבר על כל גודל אחר שנישא ע"י החלקיקים, כמו, טמפרטורה. במקרה זה היינו מקבלים את משוואת החום (משוואת פורייה):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$$

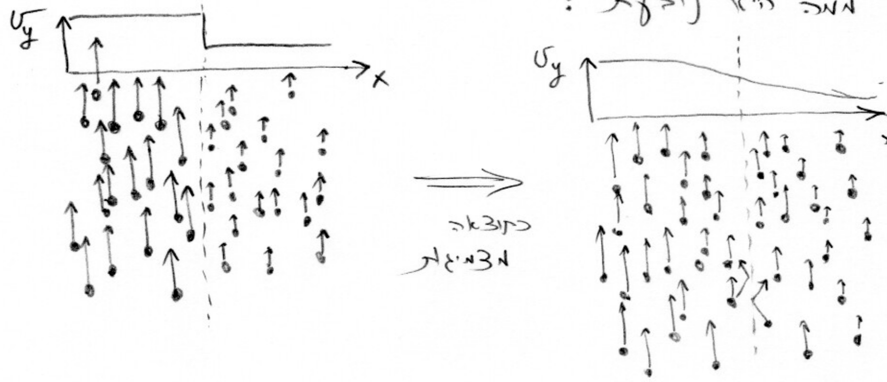
מקדם דיפוזיה / הולכת חום

במקרה לדון בדיפוזיה של גודל סקלרי, ניתן גם לדון בדיפוזיה של גודל וקטורי, למשל, המהירות?

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \underbrace{\nu}_{\text{מקדם דיפוזיית מהירות} \equiv \text{צמיגות}} \Delta \vec{v}$$

(או תנע).

צמיגות = דיפוזיה של תנע. ממה היא נובעת?



כתוצאה מהתנגשויות לאורך קו התפר ישנו מעבר של תנע. מעבר זה גורם "למריחה" של השדה מהירות.

היות והאלמנטים שלנו נעים, הנגזרת בזמן צריכה להיות נגזרת שלמה = לגרנז'יאנית

$$\frac{\partial v}{\partial t} \to \frac{Dv}{Dt}$$

ומשוואת אוילר תהפוך למשוואת נביאר-סטוקס (Navier - Stokes):

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \overbrace{\rho\nu}^{\equiv \eta}\Delta v$$ (כאן סופי!)

ν - נקראת הצמיגות הקינמטית $\rho\nu \equiv \eta$ - הצמיגות הדינמית.

משוואת N.S. היא משוואת אוילר + דיפוזיה של המהירות כתוצאה מהצמיגות. אומר זה חשוב היות ובמקרים רבים היא מעבירה את הכח מחלק אחד של הנוזל לחלק אחר שלו.

דיון מעמיק יותר – שטף התנע, טנסור המאמץ ועוד

כתיב מקוצר: $\partial_a A \equiv \frac{\partial A}{\partial x_a}$

המשוואה אליה הגענו נראית (ללא g):

$$\rho\, \partial_t v_i = -\partial_i p + \eta \overbrace{\partial_j \partial_j}^{``\Delta"} v_i - \rho \overbrace{v_j \partial_j}^{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})} v_i$$

נסתכל כעת למה שווה: $\partial_t(\rho v_i)$, דהיינו למה שווה השינוי בצפיפות התנע (תנע ליח' נפח).

$$\partial_t(\rho v_i) = \overbrace{(\partial_t \rho)}^{-\partial_j(\rho v_j)\ \text{ממשוואת הרציפות}} v_i + \overbrace{\rho\, \partial_t v}^{\text{מהמשוואה}}$$

$$= -\partial_j(\rho v_j) - \partial_i p + \eta\, \partial_j \partial_j v_i - \rho\, v_j \partial_j v_i$$

$$= -\partial_i p + \eta\, \partial_j \partial_j v_i - \partial_j(\rho v_i v_j)$$

$$= -\partial_j \Big(\underbrace{\overbrace{+p\,\delta_{ij} - \underbrace{\eta\, \partial_j v_i}_{\sigma_{visc,ij}}}^{\sigma_{ij}} + \rho\, v_i v_j}_{\Pi_{ij}} \Big)$$

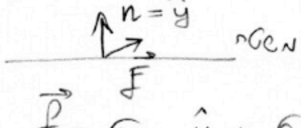
Π_{ij} - טנסור שטף צפיפות התנע (Momentum density flux tensor)

$(\Pi_i)_j$ - השטף בכיוון j של הרכיב i של התנע.

σ_{ij} – טנסור המאמץ (stress tensor) – רכיב i של הכח שפועל על מישור בכיוון j.

$$\overset{\text{כח}}{\vec{f}} \Big\{ \text{ליח' שטח.} \quad = \overline{\overline{\sigma}}\, \underbrace{\hat{n}}_{\text{הכיוון}}$$

למשל:



$$\vec{f} = \underbrace{\sigma_{yy}}\, \hat{y} + \underbrace{\sigma_{xy}}\, \hat{x}$$

יבוא מצמיגות ויבוא מלחץ

סה"כ נקבל:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}$$

הרכיב $\rho v_i v_j$ בשטף התנע נובע מתנועת הנוזל שגוררת איתו את התנע שלו.

טנסור המאמץ - גזירה כללית יותר

עבור תנועה אחידה, כמובן שנקבל ש- $\sigma=0$. עבור $\frac{dv}{dx}\neq 0$ ראינו שמקבל דיפוזיה פשוט ניתן כי $\sigma \propto \frac{dv_i}{dx_j}$. נוזלים שמקיימים את התכונה הלינארית (קראנו) נוזלים ניוטוניים. דוגמאות לנוזלים לא ניוטוניים, בהם כוחות החיכוך אינם לינאריים בנגזרות המהירות הן דם, לבה, תערובות המכילות פולימרים ארוכים ועוד. עבור זורמים ניוטוניים, הכוחות לינאריים ולכן נחפש את התלות הכללית ביותר.

הגזירה הכללית ביותר לדיפרנציאל של המהירות הוא:

$$v(\bar{x}+\delta\bar{x}) = v(\bar{x}) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j \equiv v(\bar{x}) + (\partial_j v_i)\delta x_j$$

ע"י הוספת האיבר ההפוך, ניתן לקבל חלק סימטרי וחלק אנטי סימטרי:

$$v(\bar{x}+\delta\bar{x}) = v(\bar{x}) + \underbrace{(\partial_j v_i + \partial_i v_j)}_{\text{סימטרי ב- } i,j}\delta x_j + \underbrace{(\partial_j v_i - \partial_i v_j)}_{\text{אנטי סימטרי}}\delta x_j$$

האם כוחות החיכוך יכולים להיות תלויים בחלק האנטי סימטרי? התשובה היא לא! נראה זאת ע"י בחינת המקרה של סיבוב אחיד ("גוף קשיח") $\vec{v} = \vec{\Omega}\times\vec{r}$

במקרה זה לא אמורים להיות כוחות חיכוך.

סימטרי

$$\partial_j v_i \pm \partial_i v_j = \partial_j \epsilon_{ikl}\Omega_k x_l \pm \partial_i \epsilon_{jkl}\Omega_k x_l =$$

אנטי סימטרי

(רשמנו ש- $v_i = \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k$ כאשר ϵ_{ijk} הוא הטנסור האנטי סימטרי:

$$\begin{cases} \epsilon_{ijk} = 1 & \text{ל } i=1,\ j=2,\ k=3 \text{ או פרמוטציה ציקלית} \\ \epsilon_{ijk} = -1 & \text{ל עבור פרמוטציה אנטי ציקלית} \\ \epsilon_{ijk} = 0 & \text{אם שני אינדקסים שווים} \end{cases}$$

$$= \delta_{jl}\epsilon_{ikl}\Omega_k \pm \delta_{il}\epsilon_{jkl}\Omega_k = \epsilon_{ikj}\Omega_k \pm \epsilon_{jki}\Omega_k$$

$$= \epsilon_{ikj}\Omega_k(1\mp 1) = \begin{cases} 0 & \text{מקרה סימטרי} \\ 2\epsilon_{ikj}\Omega_k & \text{מקרה אנטי-סימטרי} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ דהיינו, כח החיכוך אינו יכול להכיל רכיב אנטי סימטרי בנגזרות המהירות היות ועבור "סיבוב קשיח" יניל כח מדמיגות.

לכן, טנסור המאמץ יכיל רק רכיבים סימטריים במהירות:

$$\sigma_{ij} \propto \left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right)$$

σ_{ij} תהיה לכן מטריצה סימטרית.

מה הצורה הכללית ביותר למטריצה סימטרית עבור נוזל איזוטרופי? במקרה כזה, סיבוב מערכת הצירים אינו אמור לשנות את σ_{ij} בכלל!

זאת והסיבוב "מערבב" בין הרכיבים השונים על האלכסון וגם בין הרכיבים השונים שמחוץ לאלכסון של מטריצה, הצורה הכללית ביותר תכיל שני איברים:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 v_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 v_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 & \partial_1 v_3 + \partial_3 v_1 \\ \partial_1 v_2 + \partial_2 v_1 & 0 & \partial_2 v_3 + \partial_3 v_2 \\ \partial_1 v_3 + \partial_3 v_1 & \partial_2 v_3 + \partial_3 v_2 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן, הצורה הכללית ביותר ל- $\sigma_{visc,ij}$ לנוזל איזוטרופי, ניוטוני, היא:

$$\sigma_{visc,ij} = \eta\left(\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right) - \underbrace{\frac{2}{3}\partial_k v_k \delta_{ij}}\right) + \zeta \overbrace{\partial_k v_k}^{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}} \delta_{ij}$$

כדי להוריד
את איברי האלכסון.

η - מקדם הצמיגות. ζ – "צמיגות שניה" (second viscosity) או צמיגות נפח (bulk viscosity)

האיבר הראשון נובע מ"גזירה" – "עיוות" הנוזל ללא שינוי נפח. האיבר השני מתאר צמיגות הנובעת מ"שינויי" נפח.

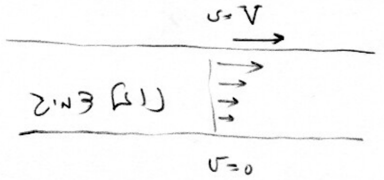
משוואת Navier Stokes

סה"כ נקבל:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \tfrac{1}{3}\eta\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

הנוזל לא דחיס:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v}$$



דוגמא 1: נתונים שני משטחים במרחק h.

ביניהם נוזל צמיג בלתי דחיס. מה פרופיל הזרימה?

מה המהירות הממוצעת של הנוזל? מה הכח שמופעל על המשטח העליון?

פתרון: רכיב $\hat{y}$ של N.S.:

$$v_y=0 \Rightarrow \quad 0=-\nabla_y p+0 \rightarrow \frac{dp}{dy}=0$$

בכיוון $\hat{x}$:

$$\rho\left[0+\underbrace{\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}\right)v_x}_{0}+\underbrace{\left(v_y\frac{\partial}{\partial y}\right)v_x}_{0}\right]=-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{0}+\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+0$$

אין נטו גרדיאנט לחץ (אם למשל הקצוות מחוברים לאטמוספירה).

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0$$

הפתרון הוא כמובן:

$$v_x=Ay+B$$

תנאי השפה הם:

$$v(y=0)=0 \Rightarrow \underline{B=0} \qquad v(y=h)=V \Rightarrow Ah=V$$

$$\Rightarrow \underline{A=V/h}$$

המהירות הממוצעת תהיה:

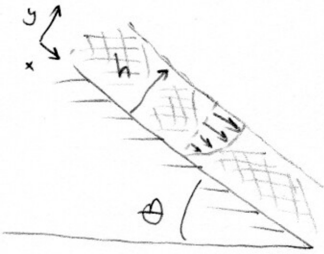
$$\langle v\rangle=\frac{1}{h}\int_0^h v_x\,dy=V/2$$

הכח ליח' שטח שפועל על המשטח העליון הוא:

לא ממש מעניין כאן.

$$\text{(ליח' שטח)}\ \vec{F}=\underbrace{\sigma_{yy}}_{p}\hat{y}+\underbrace{\sigma_{yx}}_{-\eta\frac{dv_x}{dy}}\hat{x}=p\hat{y}-\eta\left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=h}\hat{x}=p\hat{y}-\eta\frac{V}{h}\hat{x}$$

דוגמא 2: זרימה במורד מישור



נתון מישור הנטוי בזווית θ. נוזל צמיג
נוזל במורד המישור ומגיע לרוחב h, בשיווי משקל.
מהו פרופיל הזרימה? מהו השטף?

פתרון:

משוואה בכ' $\hat{y}$:
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\cos\theta \Rightarrow p = -y\rho g\cos\theta + f(x)$$

הצבת תנאי שפה $p(y=h)=P_0$:
$$p = (h-y)\rho g\cos\theta$$

בכיוון $\hat{x}$:
$$\rho[0] = -\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\frac{\partial p}{\partial x}} - \rho g\sin\theta + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

הפתרון הוא:
$$v_x = -\frac{\rho g\sin\theta}{\eta}y^2 + Ay + B$$

תנאי השפה:
$$v_x(y=0)=0 \Rightarrow B=0$$

$$\sigma_{xy}(y=h)=0 \Rightarrow \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=h}=0 \Rightarrow -2\frac{\rho g\sin\theta}{\eta}h + A = 0$$

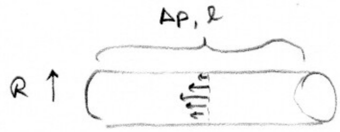
$$v_x = \frac{\rho g\sin\theta}{\eta}(2yh-y^2)$$

השטף הוא: (ליח' רוחב של המדרון):

שטף מסה כולל ליח' רוחב

$$Q = \int_0^h \rho v_x\,dy = \int_0^h \frac{\rho g\sin\theta}{\nu}(2yh-y^2)\,dy$$
$$= \frac{\rho g\sin\theta}{\nu}\left.\left(2\frac{y^2}{2}h - \frac{y^3}{3}\right)\right|_0^h = \frac{2\rho g\sin\theta}{3\nu}h^3$$

דוגמא 3: זרימה בתוך צינור.



נתון צינור באורך l. על הצינור ישנו הפרש לחצים Δp. מה השטף דרך הצינור?

פתרון

רכיב $\hat{x}$ של משוואות נביה-סטוקס יראה:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \underbrace{\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)}_{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right)}$$

נרשום את הלפלסיאן בקואו' גליליות

ונקבל:

$$\frac{1}{\eta} \overbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}^{\Delta p / l} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{r}{\eta}\frac{\Delta p}{l}$$

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r^2}{2\eta}\frac{\Delta p}{l} + A \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r}{2\eta}\frac{\Delta p}{l} + \frac{A}{r}$$

ולכן:

$$v(r) = \frac{r^2}{4\eta}\frac{\Delta p}{l} + A \ln r + B$$

תנאי השפה הם $v(r=R)=0$ ו- $v(r=0)$ אינו מתבדר! לכן:

$$A = 0, \quad B = -\frac{R^2 \Delta p}{4\eta l} \Rightarrow v(r) = \frac{(r^2 - R^2)\Delta p}{4\eta l}$$

הסימן של v הוא שלילי היות והמהירות בכיוון הפוך לגרדיינט של p. סה"כ

השטף יהיה:

$$Q = 2\pi \rho \int_0^R r(-v)\,dr = \frac{\pi \Delta p}{8 \nu l} R^4$$