משפט קלוין לסירקולציה

ראשית, נגדיר את הסירקולציה על מסלול סגור כ-

$$\Gamma \equiv \oint \vec{v}\cdot d\vec{l}$$

<u>המשפט של קלוין</u>: אם נעקוב אחר מסלול שנע ביחד עם הזרם, אז, אם הזרימה אינטרופית והכוחות החיצוניים משמרים, נקבל:

$$\underbrace{\frac{d\Gamma}{dt}}_{\text{נגזרת שלמה... דהיינו המסלול עוקב אחר הזרם.}} = 0$$

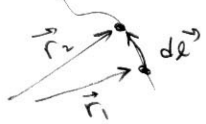
<u>הוכחה</u>:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint \vec{v}\cdot d\vec{l} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{l} + \oint \vec{v}\cdot \underbrace{\frac{d(d\vec{l})}{dt}}_{\text{מה זה?!}}$$

נסתכל על האינטגרל השני:

$$\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}(d\vec{l}) = \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}_{\text{הפרש המהירות}} = \vec{v}\cdot\underbrace{(\vec{v}_2-\vec{v}_1)}_{d\vec{v}} = \frac{1}{2}d(v^2)$$

$d\vec{l}$ הוא מקטע. נגדיר אותו בעזרת הנקודות קצה:



$d\vec{v}$ — השוני של $\vec{v}$ לאורך המקטע $d\vec{l}$

לכן, האינטגרל השני הוא:

$$\oint \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}(d\vec{l}) = \frac{1}{2}\underbrace{\oint d(v^2)}_{\text{אינטגרל על דיפרנציאל שלם לאורך מסלול סגור = 0}} = 0$$

לכן, נקבל סה"כ כי

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{l} = -\oint(\nabla h + \nabla\phi_f)\, d\vec{l} \underset{\text{משפט סטוקס}}{=} \iint_{\text{על השטח שמתוח הלולאה}} \underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}(\phi_f+h))}_{\text{רוטור של גרדיאנט}=0}\, da = 0$$

מש"ל

בזרימה אינטרופית

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\vec{\nabla}h - \nabla\phi_f$$

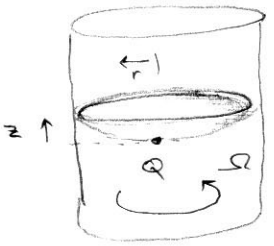
(אוילר)

אם הכוחות החיצוניים משמרים אז הם ניתנים לכתיבה כנגזרת של פוטנציאל

אם הכוחות לא היו משמרים אז $\vec{f} \neq -\nabla\phi_f$, ואם הזרימה לא הייתה אינטרופית אז $\frac{\nabla P}{\rho} \neq \nabla h$ ולא ניתן היה לכתוב את הביטוי כרוטור של גרדיאנט והיינו מקבלים ש- $\frac{D\Gamma}{Dt} \neq 0$.

משוואת אוילר במערכת מסתובבת, עם Ω קבוע (דהיינו, כגוף קשיח).

נסתכל על כוס מים, ונניח כי המים מסתובבים כגוף קשיח, למעשה, ללא השפעת חיכוך הקירות, (החיכוך הפנימי (צמיגות) יגרום למערכת להסתובב כגוף קשיח כדי למנוע את התנועה היחסית של אלמנטים שונים... אולם דיון על כל מה יחכה עד שנלמד על זרימה לא אידיאלית...) נוכל לשאול:



- מה התפלגות הלחץ?
- מה צורת פני השטח?

נפתור בעיה זו ע"י מעבר למערכת המסתובבת במהירות זוויתית Ω, במערכת זו אין תנועה, אולם יש כוח מדומה (הכוח הצנטריפוגלי); משוואת אוילר תהיה:

$$\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{0} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}\phi_{grav} + \vec{f}_{cent}$$

הכוח הצנטריפוגלי ניתן לכתיבה בעזרת פוטנציאל:

$$\vec{f}_{cent} = \Omega^2 r\hat{r} = -\vec{\nabla}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\Omega^2 r^2\right)}_{\phi_{cent}}$$

לכן, משוואת אוילר תתן לנו:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + \overbrace{\phi_{grav}}^{gz} + \phi_{cent}\right) = const$$

נבחר את הנקודה Q שבציור לנקודת ייחוס. בנקודה זו הלחץ הוא לחץ אטמוספרי.

$$\frac{P(z,r)}{\rho} + gz - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 = \frac{P_{atm}}{\rho} + 0 + 0$$

סה"כ

$$P(z,r) = -\rho g z + \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 + P_{atm}$$

ומה צורת פני השטח? אנו מחפשים את ה- $Z(r)$ שמתאר את פני השטח. מה שמאחד את הנקודות הללו הוא הלחץ האטמוספרי:

$$P_{atm} = -\rho g Z(r) + \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 + P_{atm}$$

$$Z(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} \quad \Big\} \quad \text{פרבולה}$$

משוואות מצב:

כדי לסגור את סט המשוואות, יש לקשר בין P ו-ρ. קשר זה מתקבל ממשוואות מצב (או משוואות יותר מורכבות).

כמה דוגמאות שראינו, ושעוד לא, כלליות:

- זרימה אדיאבטית = $s = const \Leftarrow P = K\rho^{\gamma}$

- זרימה איזותרמית (למשל אם אפשר להחליף חום עם הסביבה מהר מאוד):

$$PV = nkT \Rightarrow P = \underbrace{\frac{kT}{\mu m_H}}_{\text{קבוע}} \cdot \rho$$

- זרימה בלתי דחיסה $\rho = const$ ונשארים עם משוואות רק על P.

- מקרים מורכבים יותר: לדוגמא נתון גז המתחמם בקצב ליח' נפח היחסי ל-ρ ושהוא מתקרר בקצב היחסי ל-$\rho^2 T^{1/2}$. דוגמא: תווך גז חם בין כוכבי שמתחמם מקרינה מהסביבה ומתקרר ע"י "קרינת בלימה" (Bremsstrahlung)

$$\underbrace{H}_{\text{חימום}} = \alpha\rho \qquad \underbrace{\Lambda}_{\text{קירור}} = \beta\rho^2 T^{1/2}$$

שיווי משקל דורש: $H = \Lambda \rightarrow \alpha\rho = \beta\rho^2 T^{1/2}$

$$T = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \rho^{-2} \Rightarrow P = \underbrace{\frac{k}{\mu m_H}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}_{\text{קבוע}} \rho^{-1}$$

קבלנו "משוואת מצב" שונה מהרגיל...

- מקרים נוספים: חומר מנוון. חומר בו לחץ הגז אינו לחץ תרמי אלא לחץ ניוון (מעיקרון האיסור של פאולי, רמות גבוהות יותר ויותר מתאכלסות)

$P = K\rho^{\gamma}$, אם הגז קלאסי: $\gamma = 5/3$

אם הגז יחסותי: $\gamma = 4/3$

זרימה פוטנציאלית

ראינו כי בזרימה איזנטרופית אידיאלית (אין עדין חיכוך) מתקבל כי אם $\vec{\nabla}\times\vec{v}=0$ בזמן נתון, בכל המרחב, אזי $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ ישאר 0. במקרה כזה ניתן לכתוב:

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{\nabla}\phi_v}_{\text{פוטנציאל של מהירות}}$$

(פוטנציאל זה אנלוגי לפוטנציאל החשמלי: $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \Longleftarrow \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi_E$).

במקרה זה, משוואת אוילר תהיה:

$$\overbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}^{\frac{\partial \vec{\nabla}\phi_v}{\partial t}} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + \vec{v}\times\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{v})}_{\text{0 בזרימה פוטנציאלית}} = -\vec{\nabla}h - \nabla\phi_{grav}$$

אין כח משמר אחר,

לכן:

$$\vec{\nabla}\left[\frac{\partial\phi_v}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + \phi_{grav}\right] = 0$$

ואחרי אינטגרציה:

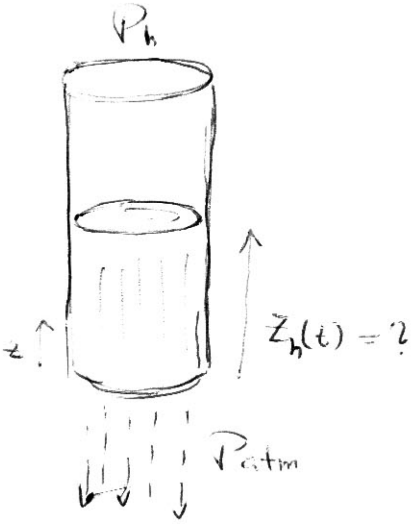
$$\frac{\partial\phi_v}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + h + \phi_{grav} = f(t)$$

נשימו לב כי למרות שמשוואה זו דומה למשוואת ברנולי ישנו שוני מהותי. משוואת ברנולי מתקיימת על קו זרימה ספציפי בכל זמן של זרימה איזנטרופית כללית. משוואה זו שהתקבלה מתקיימת עבור זמן נתון בכל המרחב ($f(t)$ אינו קבוע).

בזרימה בלתי דחיסה $h \to P/\rho$ ומתקבל:

$$\frac{\partial\phi_v}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \phi_{grav} = f(t)$$

דוגמא ראשונה לזרימה פוטנציאלית תלויה בזמן



נתון מיכל המכיל נוזל שנוזל ממנו כמתואר בציור.

צידו העליון של המיכל במגע עם גז בלחץ קבוע P_h.

צידו התחתון של המיכל במגע עם האטמוספרה

מה הביטוי לגובה הנוזל כתלות בזמן?

ההנחות:

$v(z) = const$

$\Rightarrow \phi_v = -vz$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi_v}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \phi_{grav} = f(t)$$

נסתכל בנקודה כלשהי בגובה z בנקודה זו ; בהשוואה לנקודה התחתונה,

נקבל:

$$\frac{\partial \phi_v(z)}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P(z)}{\rho} + \phi_{grav}(z) = 0 + \frac{v^2}{2} + \frac{P_{atm}}{\rho} + 0$$

הלחץ חייב לגדול לינארית בגובה. הסיבה היא שכל אלמנט בגובה dz מרגיש את אותה המסה ומאיץ באותה תאוצה, לכן הכוח הכולל, שכולל את נגזרת הלחץ, חייב להיות קבוע בגובה. לכן:

$$P(z) = P_{atm} + \frac{z}{z_h}(P_h - P_{atm})$$

כמו כן $\frac{\partial \phi_v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} z$ כי z קבוע בגזירה $\frac{\partial v}{\partial t}$. לכן:

$$\frac{\partial v}{\partial t} z = \frac{z}{z_h}\left(\frac{P_h - P_{atm}}{\rho}\right) + gz$$

אולם $\frac{\partial z_h}{\partial t} = v$ ולכן:

$$\frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{z_h}(P_h - P_{atm}) - g$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית, שבטוח ניתן לפתור נומרית... אני מודה שללא הפרש הלחצים, הנוזל יפול ב-g. הפרש הלחצים יגביל את המהירות.