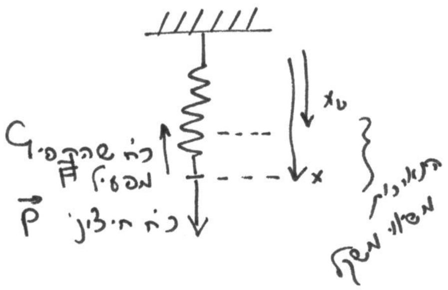


אלסטיות:

מהי אלסטיות? נסתכל על דוגמא פשוטה; קפיץ:

אני יודעים שהקפיץ יכול להתארך, וכמו כן, האנרגיה של המערכת גדלה מסביב נקודת שיווי משקל. אם מפתחים אותה בעזרת טור טיילור, מקבלים:

$$U = U_0 + \underbrace{\alpha_1 (x-x_0)}_{\text{מתאפס אם } x_0 \text{ נק' שיווי משקל}} + \frac{1}{2} k (x-x_1)^2 + \alpha_3 \underbrace{(x-x_0)^3}_{\text{סדר גבוה}} + \cdots$$

היות והפיתוח הוא סביב נקודת שיווי המשקל $\alpha_1=0$. כמו כן, אם רק הסדר המובילי מעניין אותנו, האיברים מסדר גבוה לא יהיו חשובים, ונקבל:

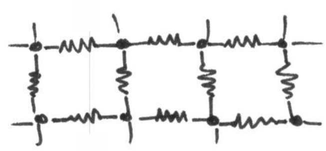
$$U = U_0 + \frac{1}{2} k (x-x_0)^2$$

אם נגזור, נקבל את הכח שהקפיץ מפעיל על הסביבה:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -k(x-x_0)$$

זהו חוק הוק. חוק זה נובע מהעובדה שכמעט כל פוטנציאל ניתן לתאר בקירוב ע"י פוטנציאל הרמוני סביב נקודת שיווי המשקל.

ובכן, באלסטיות נרצה לתאר מוצקים שבהם אטומים ומולקולות קטן נראה כמו קפיצים; בגבול הרצף של:



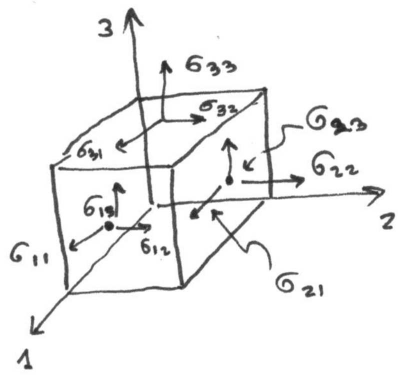
כדי להבין מה קורה בגבול הרצף, נמצא את האנלוגיות של כח (← מאמץ) של הסחה (← עיוות) אנרגיה (← אנרגיה) וכדומה.

②

טנסור מאמץ

את טנסור המאמץ ראינו כבר מהידרודינמיקה, כשדברנו על הצמיגות.

σ_{ik} – הכח שפועל בכיוון k על פאה שכיוונה i.



הכח הכולל הפועל על הנפח V הוא:

$$\underbrace{F_i}_{\text{כח בכיוון } i} = \oint_S \sigma_{ji}\, ds_j \underset{\uparrow}{=} \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\, dV$$

ע"י משפט הדיברגנס

היות והביטוי נכון עבור כל נפח, הוא יהיה נכון גם מקומית:

$$\underbrace{f_i}_{\text{כח ליח' נפח}} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$$

בנוסף, יכול לפעול כח חיצוני על הנפח, למשל, כבידה. גוף שנמצא בשיווי משקל (כך שהאלמנטים אינם מאיצים) יקיים לכן את המשוואה:

$$\underbrace{f_i + \overbrace{\rho g_i}^{\text{כח כבידה}}}_{\text{כח כולל}} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = -\rho g_i$$

מהם תנאי השפה של המשוואה?

בקצוות הגוף, יתכנו כוחות חיצוניים נתונים. התנאים יהיו על נק' על הרכיבים של $\bar{\bar{\sigma}}$ בכיוון הפאה $\hat{n}$ בה תנאי השפה.

$$\bar{\bar{\sigma}}\,\hat{n} = \vec{P}$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i$$

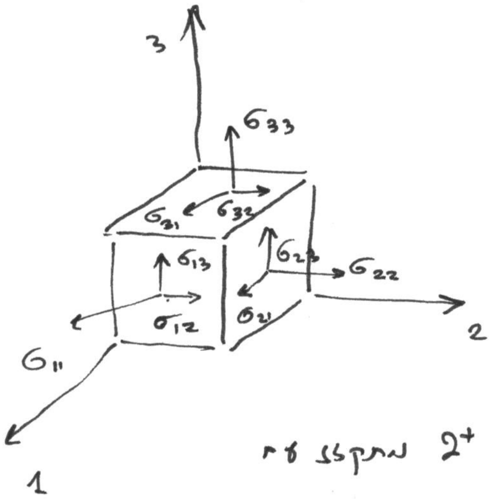
אם הכח החיצוני הוא לחץ הוא יופעל בכיוון $\hat{n}$ (אך הפוך בסימן). $p_i = -p n_i$ עבור לחץ

ואז:

$$\sigma_{ji} n_j = -p n_i$$

טנסור המאמץ הוא סימטרי

– כפי לראות זאת, נסתכל על הקוביה ממקודם במקרה בו σ קבוע. נבדוק מהו המומנט הכולל הפועל על הקוביה סביב ציר $\hat{x}$.



רוב ה-σ-ות אינן מפעילות מומנט.

σ_{33}, σ_{23} ו- σ_{13} מפעילים כח בכיוון ציר 3 ולכן לא יכולים להפעיל כח.

σ_{22} אמנם מפעיל מומנט, אולם ה-σ_{22} של הפאה 2^+ מתקזז עם המומנט המופעל ע' פאה 2^-.

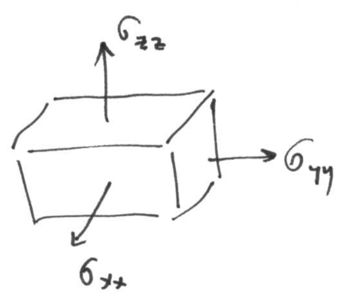
באותה צורה σ_{32} ו- σ_{31} מתקזזים אם מחברים את התרומה של שתי הפאות המנוגדות.

אנו נשארים עם σ_{12} שמפעיל מומנט בכיוון אחד ו- σ_{21} שמפעיל מומנט בכיוון ההפוך.

כדי שלא יפעל נטו מומנט על הקוביה (אנו מדברים ללא כוחות חיצוניים, הקוביה לא תרצה להסתובב מאליה...), נדרוש: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$

באותה צורה, כדי לקבל שלא יהיה מומנט סביב צירים 1 ו-2 נדרוש $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ ו- $\sigma_{13} = \sigma_{31}$. כלומר, קבלנו ש- σ צריך להיות טנסור סימטרי.

– כל טנסור סימטרי ניתן ללכסון. ז"א. אנו יכולים למצוא בכל נקודה ונקודה מערכת צירים בה הטנסור מאמץ יהיה מלוכסן, דהיינו, ניתן למצוא תיבה שעבורה הכוחות יהיו רק בכיוון הנורמל שלה.



סיבוב של טנזור המאמץ

כדי לקבל הרגשה טובה יותר על משמעות הטנזור הדו-מימדי. נבחן כיצד הוא עובר טרנספורמציית סיבוב ממערכת אחת למערכת שניה.

מע' S	מע' S'
$a \rightarrow$	$a' = a$

סקלר (טנזור דרגה 0) הוא אינוריאנטי תחת סיבובים (מטען חשמלי אינו תלוי במע' בה עובדים)

וקטור מסתובב ע"י מטריצת סיבוב:

$$\vec{V} \rightarrow \vec{V}' = \bar{\bar{A}} \vec{V}$$

ובכתיב טנזורי:

$$V_i \rightarrow V_i' = A_{ij} V_j$$

מטריצת הסיבוב היא אורתוגונלית ומקיימת

$$\bar{\bar{A}} \bar{\bar{A}}^T = \bar{\bar{I}}$$

דוגמא, סיבוב סביב ציר $\hat{z}$ הוא:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

טנזור יעבור סיבוב בצורה דומה, אולם הפעם ישנם שני מימדים:

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}' = A_{ik} A_{jl} \sigma_{kl}$$

ניתן לכתוב בכתיב וקטורי/מטריצי ע"י העברת A השני לצד השני של σ:

$$\sigma_{ij}' = A_{ik} \sigma_{kl} A_{jl} = A_{ik} \sigma_{kl} A^T_{lj}$$

ובכתיב מטריצי:

$$\bar{\bar{\sigma}}' = \bar{\bar{A}} \bar{\bar{\sigma}} \bar{\bar{A}}^T$$

דוגמא: אם נרצה לסובב סביב ציר $\hat{z}$, החלק של σ ללא $\hat{z}$ יראה:

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta & \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin\theta\cos\theta \\ \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin\theta\cos\theta & \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

לקשר זה קוראים קשרי מוהר.

(Mohr circle equations)

משוואות הכוחות בקואורדינטות פולריות\צילינדריות

ראינו כי שיווי כוחות נותן את המשוואה:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -f_i$$

בקואורדינטות קרטזיות היא נראית:

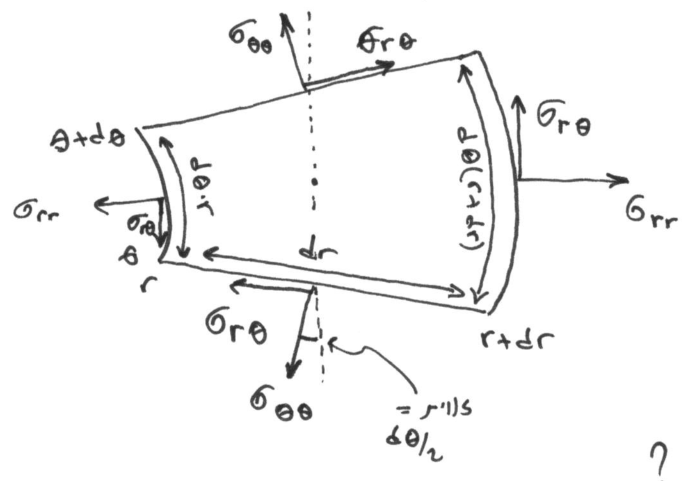
$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = -f_1$$

+ 2 משוואות דומות ל- $\hat{2}$ ו- $\hat{3}$.

כיצד תראה משוואה זו בקואורדינטות פולריות או צילינדריות?

את הפיתוח המתמטי הריגורוזי ניתן לעשות בקלות, באופן פורמלי, בעזרת גיאומטריה דיפרנציאלית. פיתוח זה יתן את הדיברגנס של טנסור בעזרת סימני קריסטופל. מי שלומד יחסות כללית יתקל בהם כבר בשבוע הראשון. היות ורובינו אינו יודע גיאומטריה דיפרנציאלית נחשב בשלב זה את הדיברגנס בעזרת חישובי כוחות.

נסתכל על אלמנט בין r ל- $r+dr$ ובין θ ל- $\theta+d\theta$. מהו הכח הכולל הפועל עליו?



מהו סה״כ הכח בכיוון $\hat{r}$?

$$\underbrace{\overbrace{\sigma_{rr}(r+dr)}^{\text{מחושב ב- } r+dr}(r+dr)d\theta - \sigma(r)\, r\, d\theta}_{\text{מפאות רדיאליות}} + \sigma_{\theta r}(\theta+d\theta)\cdot dr - \sigma_{\theta r}(\theta)dr$$

$$- \sigma_{\theta\theta}\frac{d\theta}{2}\cdot dr \underbrace{\times 2}_{\text{שתי פאות תורמות}} = - \underbrace{f_r}_{\text{כח על הנפח}}\, r\, d\theta\, dr$$

שימו לב כי יש לקחת את הרכיב הרדיאלי של $\sigma_{\theta\theta}$. הוא יחסי ל- $\sin d\theta$

והוא מופיע בו סדר ראשון: $\sin d\theta \sim d\theta$

6

אין צורך לקחת את התיקונים $\cos\frac{d\theta}{2}$ עבור התרומה של $\sigma_{\theta r}$ ו- σ_{rr}

היות ותיקונים אלה הם מסדר גודל של $\cos\frac{d\theta}{2}\cong 1-\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{2}\right)^2$, דהיינו, סדר שני ב- $d\theta$.

את ההפרשים ניתן לרשום בעזרת ההגדרה של נגזרות:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} r\,dr\,d\theta + \sigma_{rr}\,dr\,d\theta + \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\theta}\,dr\,d\theta - \sigma_{\theta\theta}\,dr\,d\theta = -f_r\, r\,dr\,d\theta$$

נחלק ב- $r\,dr\,d\theta$ ונקבל:

$$\underbrace{\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}}_{=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r}-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial\theta} = -f_r$$

בצורה דומה, נקבל שבכיוון $\hat{\theta}$ המשוואה נראית:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial(r^2\sigma_{r\theta})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} = -f_\theta$$

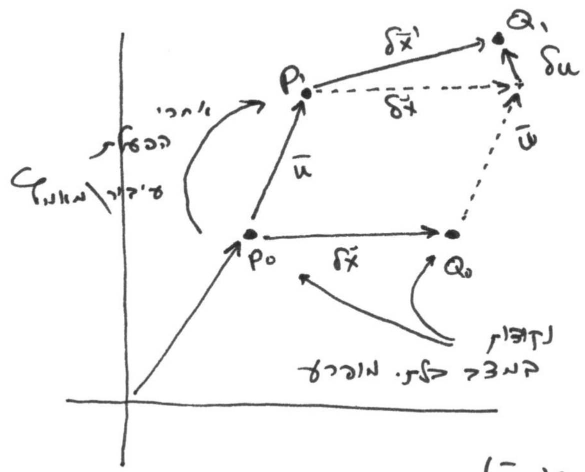
עם ציר $\hat{z}$, נקבל את המשוואות:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\sigma_{rr,r}}^{=\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}} + \frac{1}{r}\sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rz,z} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} &= -f_r \\
\sigma_{\theta,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{\theta z,z} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} &= -f_\theta \\
\sigma_{zr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{z\theta,\theta} + \sigma_{zz,z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} &= -f_z
\end{aligned}$$

and also spherical coordinates:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{r\varphi,\theta} + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\sigma_{r\theta,\theta} + \frac{2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{r\varphi}\cot(\varphi)}{r} &= -f_r \\
\sigma_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\varphi\varphi,\theta} + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\sigma_{\varphi\theta,\theta} + \frac{3\sigma_{\varphi r}+(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\theta\theta})\cot(\varphi)}{r} &= -f_\varphi \\
\sigma_{\theta r,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta\varphi,\theta} + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\sigma_{\theta\theta,\theta} + \frac{3\sigma_{r\theta}+2\sigma_{\varphi\theta}\cot(\varphi)}{r} &= -f_\theta
\end{aligned}$$

טנסור העיבור ≡ strain



נגדיר את העיבור של בעזרת הציור הבא.
המשמעות הפיסיקלית שלו היא התנועה היחסית
בוקטור המחבר בין שתי נקודות.

אם לפני העיבור\הפעלת מאמץ, הנקודות P_0 ו-Q_0 חוברו ע"י הקטע $\delta\bar{x}$
אזי אחרי העיבור (שהזיז את הנקודה P_0 ל-P_1 בוקטור $\bar{u}$),
הוקטור החדש שמחבר את הנקודות P_1 ו-Q_1 החדשות הוא $\delta\bar{x}'$.

הגדרת העיבור היא:
$$\delta\bar{u} = \delta\bar{x}' - \delta\bar{x}$$

נוכל גם להגדיר אותו דיפרנציאלית:
$$\delta\bar{u}_i = \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}\delta x_k$$
בכמה הרכיב i של הוקטור u
משתנה אם הולכים צעד בכיוון x_k.

באופן כללי, ניתן לכתוב את וקטור העיבור כתרומה סימטרית + תרומה אנטיסימטרית:
$$\delta u_i = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}_{\equiv u_{ik}}\delta x_k + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)}_{\equiv \xi_{ik}}\delta x_k$$

ז.א.:
$$\delta u_i = u_{ik}\,\delta x_k + \xi_{ik}\,\delta x_k$$

u_{ik} נקרא טנסור העיבור (או עיוות)
ξ_{ik} הוא טנסור אנטי סימטרי. כפי שראינו בדיון של 3 ממדים, טנסור זה תיאר
סיבוב ולכן לא יעניין אותנו באלסטיות (חומר אינו משנה את האנרגיה שלו
אם מסובבים אותו - רק אם מותחים אותו... כמובן, אם ישנה
אינטראקציה מיוחדת (כמו עם שדה מגנטי חיצוני, נוכל לקבל איבר אנרגיה
כזה, אולם במקרים שאנו נבחן, לא יהיה).

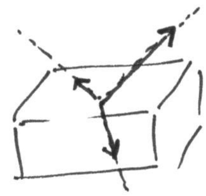
(8)

ליכסון u_{ik}

כל מטריצה סימטרית ניתנת ללכסון, ובפרט u_{ik}. לכן, בכל נקודה ישנה מע' צירים בה u_{ik} יראה:

$$u_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ז.א. בכל מקום ניתן לתאר את העיוות כמתיחה שונה לאורך שלושה צירים ראשיים.



נעבוד במערכת הצירים הראשית.

נסתכל על קוביה עם נפח $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ לפני שמבוצע מתיחה. אחרי המתיחה\עיוות כל צלע הקוביה יתעוות ויהיה:

$$\delta x_1' = \delta x_1 (1 + u_{11})$$

$$\delta x_2' = \delta x_2 (1 + u_{22}) \qquad \delta x_3' = \delta x_3 (1 + u_{33})$$

הנפח החדש יהיה:

$$\delta V' = \delta x_1' \delta x_2' \delta x_3' = (1+u_{11})(1+u_{22})(1+u_{33}) \underbrace{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}_{\delta V}$$

ז.א. שינוי הנפח היחסי יהיה:

עבור עיוותים קטנים.

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} \simeq (1 + u_{11} + u_{22} + u_{33}) - 1$$

$$\simeq Tr(u_{ik})$$

היות ו- Tr הוא אינוריאנטי תחת טרנס' סיבוב, שינוי הנפח תמיד נתון ע"י ה- Tr של u_{ik}. אם נוכל לרשום את u_{ik} כתוצאה מאיבר שאינו מכיל Tr ואיבר שהוא ה- Tr. האיבר הראשון יתאר עיוות ללא שינוי נפח בגזירה ואילו השני יתאר שינוי נפח:

$$u_{ik} = \underbrace{\left(u_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right)}_{\text{גזירה ללא שינוי נפח.}} + \underbrace{\tfrac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}}_{\text{שינוי נפח}}$$

האנרגיה של המערכת האלסטית

האנרגיה של המערכת U (או האנרגיה החופשית $F=U-TS$ אם מדובר בשינויים איזותרמיים) צריכה להיות סקלר שהוא תבנית ריבועית ב- u_{ik} אם מדובר בחומר איזוטרופי. אם החומר אינו איזוטרופי, כי אז אין האנרגיה צריכה להיות אינווריאנטית תחת סיבוב והיא לא צריכה להיות סקלר במובן זה.

שתי הדרכים לקבל סקלר מטנזור דו-מימדי הן:

$$\underbrace{u_{ik}u_{ki} = (u_{ik})^2}$$

קודם להכפיל את המטריצה בעצמה ואח"כ להעלות בריבוע.

$$(u_{ii})^2$$

קודם Tr ואח"כ להעלות בריבוע.

נראה למשל כי u_{ii} אינווריאנטי:

$$u'_{ii} = A_{im}\underbrace{A_{in}}_{\text{מטריצת הסיבוב}}u_{mn} = \underbrace{A_{im}A^T_{ni}}_{=\delta_{mn}}u_{mn} = u_{mm}$$

בדרך דומה ניתן להוכיח את האינווריאנטיות של $(u_{ik})^2$.

האנרגיה תהיה תבנית ריבועית לכן:

$$U = U_0 + \mu u_{ik}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{כך נהוג להגדיר}}\lambda u_{ii}^2$$

μ ו- λ נקראים מקדמי לָמֶה (Lamé).

ראינו שאת העיוות ניתן לפרק לחלק ללא Tr, וחלק שהוא ה-Tr:

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\delta_{ll}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}$$

אם נציב את הביטוי הנ"ל בתוך הביטוי עבור U נקבל:

$$U = U_0 + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\delta_{ll}\right)^2 + \frac{1}{2}K u_{ii}^2$$

כאשר: $K \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu$

מהאנלוגיה ניתן לקבל את הקשר בין הכח להעתקה ← בין הטנזור מאמץ לטנזור עיוות:

בקפיץ: $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$ } כח שהקפיץ מפעיל

$\sigma_{ik} = +\frac{\partial U}{\partial u_{ik}}$ } מאמץ שפועל על הגוף

במקרה שלנו: $$\sigma_{ik} = 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} u_{ll}\right) + K\delta_{ik} u_{ll}$$

אלו האקוויוולנט של חוק הוק. ניתן להפוך את הקשר ל- u_{ik} של σ_{ik}. (נעשה זאת ע"י חישוב σ_{kk}:

$$\sigma_{kk} = 2\mu\underbrace{\left(u_{kk} - \frac{1}{3}\delta_{kk} u_{ll}\right)}_{=0} + K\delta_{kk} u_{ll}$$

ז"א: $$\sigma_{kk} = 3K u_{ll} \Longrightarrow u_{ll} = \frac{\sigma_{ll}}{3K}$$

נציב זאת בביטוי עבור σ_{ik} ונקבל:

$$\sigma_{ik} = 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right) + \frac{K}{3K}\delta_{ik}\sigma_{ll}$$

ולכן:

$$u_{ik} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right) + \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll}$$

לדוגמא:

$$u_{xx} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right) + \frac{1}{9K}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$u_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu}$$

וכן הלאה...

<u>דוגמא</u>: מתיחה בכיוון יחיד.

נסתכל על הדוגמא בה אנו מותחים גוף (למשל מוט) בכיוון אחד. במקרה זה:

$$\sigma_{xx}=p \quad \sigma_{yy}=0 \quad \sigma_{zz}=0$$

נקבל:

$$u_{xx}=\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{\mu}\right)}_{\equiv E^{-1}}p \implies u_{xx}=\frac{p}{E}$$

E נקרא המודוליס האלסטי של יאנג (Young) והוא מתאר לנו כמה גוף מתארך כאשר מפעילים מותחים (או מכווצים) בכיוון אחד כאשר שני הכיוונים האחרים חופשיים.

העיבור בכיוונים הניצבים הוא:

$$u_{yy}=u_{zz}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu}-\frac{1}{3K}\right)p$$

אם נרצה להגדיר את <u>מקדם פואסון</u> ע"י:

$$u_{yy}=u_{zz}=-\underbrace{\nu}_{\text{מקדם פואסון}}u_{xx}$$

נקבל:

$$\nu\equiv\frac{\frac{1}{2\mu}-\frac{1}{3K}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{\mu}\right)}=\frac{1}{2}\,\frac{3K-2\mu}{3K+\mu}$$

היות ו- $\mu>0$ ו- $K>0$ (אחרת F לא יהיה מינימום!) נקבל: $-1\le\nu\le 1/2$

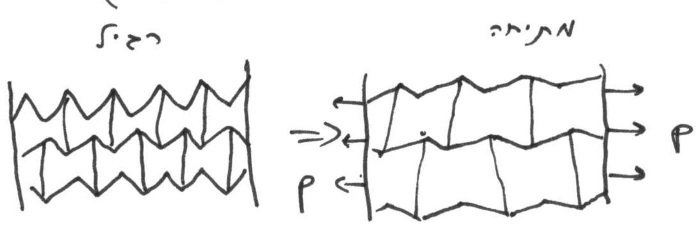
ν מתאר לנו כמה הגוף מתכווץ (או מתרחב עבור $\nu<0$) אם מותחים אותו בציר ניצב.

ν כמעט תמיד חיובי:

$$\nu\sim\underset{\text{בטון}}{0.2}\,,\ \overset{\text{אלומיניום, פלדה}}{0.3}\,,\ \underset{\text{גומי}}{0.5}$$

גומי למשל אינו משנה את הנפח שלו כאשר מותחים אותו! זאת מפני ש- $\mu\ll K$ וזו שווה לחומר לשנות את הנפח.

חומרים עם $\nu<0$ קיימים רק משנת 1987. הם נקראים אוקסטיים (auxetics) והם למעשה מבנים שריג (מקרוסקופי לא מיקרוסקופי), שמתרחב כאשר מותחים אותו:



אם כותבים את המשוואות בעזרת E ו- ν , מקבלים:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu}\left(u_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll}\delta_{ik} \right)$$

$$u_{ik} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ik} - \nu\,\sigma_{ll}\delta_{ik}\right]$$

למשל:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)u_{xx} + \nu\left(u_{yy}+u_{zz}\right)\right]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}u_{xy}$$

$$u_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right)$$

גופים לא איזוטרופיים

אם מדובר בגופים לא איזוטרופיים, אזי לא ניתן לכתוב את האנרגיה בעזרת סקלרים (שאינם תלויים בסיבוב). במקרה הכללי ביותר, נקבל קשר כללי בין טנסור המאמץ לטנסור העיבור:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl}u_{kl}$$

זהו חוק הוק המוכלל.

באופן כללי, ל- λ ישנם $3^4=81$ איברים. אולם, מסימטריה, ניתן להראות שאפילו במקרה הכללי ביותר, ישנם לכל היותר 21 פרמטרים בלתי תלויים.

במידה וישנה סימטריה נוספת אזי יש עוד פחות. למשל, הגבישים טריקליניים - 18, במונוקליני - 13, רהומבי - 9, טטרגונלי - 6, הקסגונלי - 5 וקובי - 3.