מכניקת הרצף

מכניקת הרצף מתארת מערכות עם כל כך הרבה חלקיקים שהם מתוארים ע"י גדלים רציפים. להבדיל ממכניקה סטטיסטית, אין אנו אפילו מסתכלים על פלקטואציות, רק בגדלים ממוצעים. להבדיל ממכניקה סטטיסטית של שיווי משקל (אותה אתם מכירים או שתכירו בקרוב) אנו בוחנים מערכות דינמיות הלא הומוגניות על סקלות מקרוסקופיות.

מכניקת הרצף כוללת מספר תחומים קרובים בניהם הידרודינמיקה, מעבר חום, אלסטיות ועוד.

הקשר למכניקה סטטיסטית:

אם נתונה פונקצית התפלגות (כמה חלקיקים יש באלמנט במרחב הפאזה ה-6 מימדי):

ניתן למשל להגדיר "צפיפות":

מסה של חלקיק אחד

$$\rho(\vec{x},t) \equiv m \int d^3\vec{v}\, f(\vec{x},\vec{v},t)$$

או למשל שטף מסה:

$$\rho\vec{v} \equiv m \int d^3\vec{v}\, \vec{v}\, f(\vec{x},\vec{v},t)$$

לכן, ניתן להגיע למשוואות ההידרודינמיקה ממכניקה סטטיסטית ע"י מיצוע. אולם יותר קל להגיע אליהן ע"י חוקי שימור.

משוואות הזרימה האידאליות (משוואות של גזים ונוזלים ללא חיכוך \ צמיגות).

משוואת הרציפות: = משוואת שימור החומר.

נתון אלמנט נפח V, שדה צפיפות ρ ושדה מהירות $\vec{v}$.

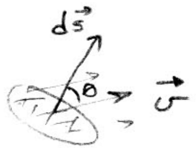
כמות המסה בתוך האלמנט היא:

$$M = \int_V d^3x\, \rho(\vec{x},t)$$

שטף החומר שיוצא החוצה מהאלמנט:

$$\Phi_M = \underset{S}{\oint} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

על פני השטח.



$$d\phi = ds \cdot v \cdot \cos\theta$$

שימור מסה:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\Phi_M$$

שטף חיובי = שטף יוצא.

לכן:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho\, d^3x\right) = -\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})\, d^3x$$

משפט הדיברגנס (גאוס)

היות והביטוי נכון עבור כל אלמנט נפח V, הוא נכון באופן לוקלי:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})}$$

משוואות שימור תנע = משוואות אוילר Euler

נסתכל על אלמנט מסה M הנמצא ברגע נתון בנפח V.

מה משוואות התנועה שלו?

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\sum \vec{F}}_{\text{כל הכוחות על האלמנט}}$$

למה שווה $\sum \vec{F}$?

א. אם יש כח כבידה:

$$\vec{F}_{grav} = \overbrace{\int_V d^3x\, \rho}^{M}\, \vec{g}$$

ב. הלחץ פועל על הדפנות

$$\vec{F}_p = \underbrace{-}_{\text{הלחץ פועל פנימה ואילו } d\vec{s} \text{ הוא החוצה}} \oint_S d\vec{s} \cdot p \underset{\text{משפט הדיברגנס}}{=} -\int_V d^3x\, \vec{\nabla} p$$

הערה:

מי שלא רואה איך זה קשור למשפט הדיברגנס:

$$\vec{F}_p = -\oint d\vec{s}\,p = -\left(\oint d\vec{s}\cdot\hat{x}\,p,\ \oint d\vec{s}\cdot\hat{y}\,p,\ \oint d\vec{s}\cdot\hat{z}\,p\right) =$$

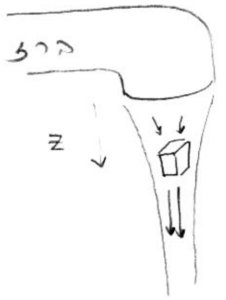
$$= -\left(\int_V d^3x\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\hat{x}p)}_{\frac{\partial p}{\partial x}},\ \dots,\ \dots\right) = -\int_V d^3x\,\vec{\nabla}p$$

למה שווה $\frac{d\vec{v}}{dt}$? נסתכל על משמעות הנגזרת השלמה:

גודל כלשהוא למשל v_x

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} + \frac{\partial a}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}a$$

מה המשמעות של הנגזרת השלמה? הנגזרת השלמה מתקבלת כשגוזרים גודל לפי הזמן ועוקבים אחריו. הנגזרת החלקית $\frac{\partial}{\partial t}$ לעומת זאת מתקבלת אם מסתכלים על אותה הנקודה, למשל, נסתכל על ברז המים שבציור.



- אם מסתכלים רק על האלמנט, או הנקודה של האלמנט, ב-z נתון, תמיד נראה את אותה המהירות, לכן:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

- לעומת זאת, אם נעקוב אחרי מולקולת מים מסוימת, נראה אותה מאיצה כלפי מטה, כתוצאה מ-g. לכן, $\frac{dv}{dt} \neq 0$. ואמנם, נקבל כי:

$$\frac{dv_z}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}}_{0} + \underbrace{(\bar{v}\cdot\bar{\nabla})}_{v_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}}v_z = v_z\frac{dv_z}{dz}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ - נגזרת אוילריאנית Eulerian - בנקודה

$\frac{d}{dt} \equiv \frac{D}{Dt}$ - נגזרת לגראנג'יאנית Lagrangian - כשעוקבים אחרי הנוזל שלנו.

בחזרה למשוואות:

$$\int \rho \frac{d\vec{v}}{dt}\, d^3x = \int d^3x\, \rho \vec{g} - \int d^3x\, \vec{\nabla} p$$

היות ונכון עבור כל נפח, יהיה נכון גם לוקלית:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$

נחלק ב- ρ

משוואות אוילר

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}}$$

הידרוסטטיקה:

הידרוסטטיקה מתקבלת עבור $\vec{v}=0$, ואז משוואות אוילר נראות:

משוואת ההידרוסטטיקה

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = \vec{g}}$$

דוגמא I: אטמוספירה עם $\vec{g}$ קבוע ו- T קבוע:

מהירות הקול

$$PV = NkT \implies p = \frac{kT}{\mu m_H}\rho = \frac{v_s^2}{\gamma}\rho$$

מסה ביחידת נפח

$$\rho = \frac{m}{V}\ ;\ N = \frac{m}{\mu m_H}$$

יחידת נפח ; מספר מולקולרי ; מסת מימן ; נראה בהמשך ; מקדם אדיאבטי

לכן:

$$\frac{v_s^2}{\gamma}\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\rho = \frac{v_s^2}{\gamma}\vec{\nabla}\ln\rho = \vec{g} = -g\hat{z}$$

נבצע אינטגרציה ונקבל:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\gamma g z}{v_s^2}\right) \equiv \rho_0 \exp\left(-z/h\right)$$

סקלת גובה - $h \equiv \dfrac{v_s^2}{\gamma g} = \dfrac{(300\,\text{m/sec})^2}{1.4\cdot 10\,\text{m/sec}^2} \simeq 6000\,\text{m} = 6\,\text{km}$

Scale height

באוויר

דוגמא II : משוואת ההידרוסטטיקה בכוכב :

שדה הכובד נגזר מפוטנציאל: $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$

משוואת פואסון לכבידה: $\Delta\phi = 4\pi G\rho$

הסימן חיובי +, בחשמל הוא מינוס.

נקח $\vec{\nabla}\cdot$ ממשוואת ההידרוסטטיקה:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right) = -\Delta\phi = -4\pi G\rho$$

בקואורדינטות כדוריות לגוף שהוא ספרי-סימטרי:

גרדיינט: $\vec{\nabla}() = \frac{d}{dr}()$

דיברגנס: $\vec{\nabla}\cdot() = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2()\right)$

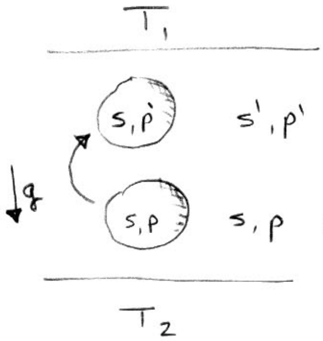
לכן:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho$$

דוגמא III:

שימוש במשוואה ההידרוסטטית: קריטריון שוורצשילד לקונבקציה

נתונה אטמוספירה עם גרדיאנט צפיפות וגרדיאנט טמפ'. מהו התנאי לכך שהיא תהיה יציבה לקונבקציה?



מזיזים אלמנט מסה מ- z ל- z'.

כדי שהמערכת תהיה יציבה, צפיפות האלמנט אחרי ההזזה צריכה להיות גבוהה יותר, כדי שהוא יחזור חזרה:

יציבות: Stability: $\rho(p',s) > \rho(p',s')$

מניחים שהאלמנט אינו מחליף חום עם הסביבה $\Leftrightarrow$ $s=\text{const}$

המשמעות עבור הנפח של יחידת מסה היא: $V=1/\rho$:

$$V(p',s') - V(p',s) > 0 \Rightarrow \left.\frac{dV}{dz}\right|_p > 0$$

כלומר:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial s}\right|_p \cdot \frac{ds}{dz} > 0$$

מתרמודינמיקה ידוע כי $\left.\frac{\partial V}{\partial s}\right|_p = \frac{T}{C_p}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p$ כמו כן, $T, C_p > 0$ ותחת ההנחה כי $\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p > 0$ (כמעט תמיד נכון פרט למספר מקרים אנומליים, כמו מים בין $0°$ ל-$4°$!)

התנאי הוא: $\frac{ds}{dz} > 0$ (יציבות)

אולם:

$$\frac{ds}{dz} = \underbrace{\left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_p}_{\frac{C_p}{T}} \frac{dT}{dz} + \underbrace{\left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T}_{-\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p} \frac{dp}{dz} > 0$$

מתרמודינמיקה

ממשוואת ההידרוסטטיקה ולכן: $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{g}{V}$

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{C_p}\underbrace{\frac{T}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}_{=1} = -\frac{g}{C_p}$$

עבור גז אידיאלי

עבור אוויר $C_p = 1.0035\ J\,g^{-1}K^{-1} \simeq 1.0\times10^3\ J\,kg^{-1}K^{-1}$:

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{10\ m/sec^2}{10^3\ m^2/sec^2\ K^{-1}} \simeq 0.01\ °K/m$$

זרימה איזנטרופית : $S = const$

$$\underbrace{dh}_{\text{אנתלפיה ליח' מסה}} = T\,\underbrace{ds}_{0} + V\,dp = \frac{dp}{\rho}$$

לכן משוואת אוילר נראית:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec v\cdot\vec\nabla\right)\vec v = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi = -\vec\nabla h - \vec\nabla\phi$$

(נשתמש בזהות הוקטורית:

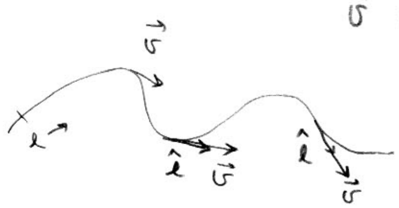
$$\frac{1}{2}\vec\nabla v^2 = \vec v\times(\vec\nabla\times\vec v) + (\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v$$

ונקבל:

$$(**)\qquad \frac{\partial\vec v}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec\nabla v^2 - \vec v\times(\vec\nabla\times\vec v) = -\vec\nabla h - \vec\nabla\phi$$

משוואת ברנולי: Bernoulli

כאשר אין תלות מפורשת בזמן, ניתן לקבל את משוואת ברנולי, (אשר נכונה) ע"י בחינת קו זרימה. קו הזרימה יאופיין ע"י קואורדינטה l. בכל נקודה ונקודה ניתן להגדיר $\hat l$ שיהיה בכיוון קו הזרימה, דהיינו, בכיוון $\vec v$



לאורך קו זרימה, הגדלים שלנו יהיו פונקציה של l:

$x = x(l),\ y = y(l)\ z = z(l)$

$\rho = \rho(l),\ h = h(l)\ \ldots$

אם נכפיל את המשוואה $(**)$ ב- $\hat l\cdot$ נקבל איברים שנראים $\hat l\cdot\vec\nabla$

זוהי הנגזרת המכוונת בכיוון $\hat l$ לכן: $\hat l\cdot\vec\nabla() = \frac{d()}{dl}$

כמו כן, $\hat l\cdot(\vec v\times(\,)) = 0$ כי $\vec v\parallel\hat l$ ו- $(\vec v\times(\,))$ ניצב ל- $\vec v$.

סה"כ נקבל: (אחרי זריקת האיבר עם הרוטור וה- $\frac{\partial}{\partial t}$ כי אין תלות מפורשת בזמן):

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{2}v^2 + h + \phi\right) = 0$$

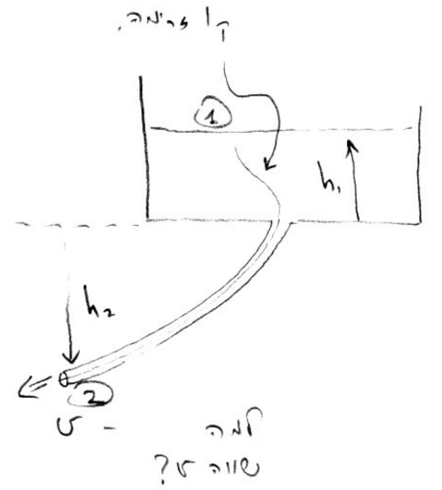
לכן, לאורך קו זרימה של זרימה איזנטרופית:

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + h + \phi = const}$$

ברנולי

המשוואה נראית כמו שימור אנרגיה. הסיבה שיש לנו את האנתלפיה h ולא את האנרגיה הפנימית היא שכאשר אלמנט משנה את נפחו, האנרגיה הפנימית משנה את גודלה בגלל העבודה של הסביבה ומה שנשאר קבוע הוא האנתלפיה

דוגמא לשימוש בברנולי.



נתון מיכל עם צינור קטן ממנו זורמים מים.

פורמלית הבעיה אינה סטציונרית היות והמיכל מתרוקן ממים, אולם גם הזמן שלוקח למים לזרום דרך הצינור החוצה קטן בהרבה מזמן הריקון של המיכל, כי אז ניתן להניח שהבעיה, בקירוב סטציונרית, משוואת ברנולי אז תהיה תקיפה.

פתרון: ראשית, הנוזל בלתי דחיס. ולכן:

$$dh = \frac{dp}{\rho} \Rightarrow h = \frac{P}{\rho}$$

בנקודה 1 העליונה, הלחץ הוא לחץ אטמוספירה. $P_1 = P_{atm}$

כמו כן, כך המצב בנקודה 2. $P_2 = P_{atm}$

בנקודה העליון, המהירות 0 ובתחתון, $v = v$ אותו רוצים למצוא.

ϕ למעלה הוא: $\phi_1 = gh_1$ (את נקודת הייחוס היינו תחתית המיכל)

וקצה הצינור: $\phi_2 = -gh_2$

ברנולי נותן:

$$0 + \frac{P_{atm}}{\rho} + gh_1 = -gh_2 + \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{1}{2}v^2$$

כלומר: $v = \sqrt{2g(h_1+h_2)}$