פרופ' ניר שביב

# אסטרופיסיקה וקוסמולוגיה 77501

## מבחן לדוגמא, סמסטר חורף תשע"ג

- המבחן הוא ללא כל חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
  - דפי הנוסחאות המצורפים עם הבחינה
  - מחשבון
- משך המבחן שעתיים וחצי.
- בבחינה שני חלקים. בחלק הראשון יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות ואילו בחלק השני יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. יש לסמן במשבצת שליד כל שאלה אם ברצונכם שהיא תבדק.
- את התשובות, כולל הדרך, יש לכתוב בטופס הבחינה. רצוי להעזר במחברת משבצות כדפי טיוטא. בסוף הבחינה יש להגיש את הטופס וניתן (אך לא חובה וגם לא רצוי) להגיש את המחברת. תוכלו למצוא עותק באתר.
- שימו לב סכום הניקוד הוא 99. עד שתי נקודות נוספות הן בעבור סדר. (לכן רצוי להשתמש בטיוטא!).

בהצלחה!

לשימוש הבודק:

| סופי | סדר | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

## חלק א'

1. ☐ 13 נק'. כוכבים מסיביים על הסדרה הראשית הם קונבטיביים בליבתם מהסיבות הבאות. (הקיפו את התשובה או התשובות הנכונות בעיגול).

(א) כי הם שורפים מימן להליום בעזרת ה- CNO cycle.

(ב) כי האטימות גבוהה בתנאים השוררים בליבה.

(ג) כי קצב יצור האנרגיה מראקציות גרעיניות גבוה מאד בכוכבים מסיביים.

(ד) כי הצפיפות נמוכה יחסית.

---

נמקו: התנאי לקונבקציה הוא: $\frac{\kappa m_p L(r)}{\mu q c T^4 m(r)} > \frac{16\pi}{3} \frac{G m_p}{k} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$

בשריפת CNO ישנו יצור אנרגיה גדול מאוד שמרוכז במרכז. לכן $L/M$ מאוד גדול.

הסיבה לריכוזיות היא ש- $\epsilon \sim T^n$ ו- $n$ מאוד גדול עבור CNO.

הערה

(ב) לא נכון כי האטימות דווקא נמוכה!

(ג) ה- $L$ הגדול אינו קשור ישירות (מה שחשוב בעיקר הוא ה- $L/M$ הגדול. אבל לכן סימון (ג) או אי סימון היו מתקבלים! (+ נימוק).

(ד) אינו נכון להיפך (בכוכבים מסיביים הצפיפות נמוכה יותר במרכז!).

---

2. ☐ 13 נק'. חומר נספח על כוכב בעל מסת שמש אחת ורדיוס $R_1$ (למשל ננס לבן). שכבת הגבול מהכוכב שמסתובב לאט קורנת בעצמת הארה $L_1$ וטמפרטורה אופיינית $T_1$. כעת חומר נספח באותו הקצב על כוכב בעל רדיוס $R_2$ (למשל כוכב נויטרונים).

כיצד ישנו עצמת ההארה והטמפרטורה האופיינית? (ספציפית, מהן החזקות $p$ ו- $q$ בביטויים:

$$L_2 \approx L_1 (R_2/R_1)^p \qquad T_2 \approx T_1 (R_2/R_1)^q$$

---

תשובה: האנרגיה המשתחררת בשכבת הגבול היא: $L \approx \frac{GM\dot{m}}{2R}$

לכן: $p=-1$.

האנרגיה קורנת משטח שגודלו מסדר גודל של: $4\pi R^2$ ולכן:

$$L \approx 4\pi R^2 \sigma T^4 \rightarrow T \approx \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} \approx \left(\frac{GM\dot{m}}{8\pi R^3 \sigma}\right)^{1/4}$$

לכן: $q \approx -3/4$

---

3. ☐ 13 נק'. הקורונה היא הילה ספרית של פלסמה חמה מאד המקיפה את השמש. הטמפרטורה בקורונה מגיעה למיליוני מעלות, הרבה מעל הטמפרטורה על שפת השמש שהיא מסד"ג של 6000 מעלות. בזמן ליקוי חמה, ניתן לראות את הקורונה מאירה באור לבן, הודות לפיזור תומסון של קרינת השמש ע"י אלקטרונים חופשיים בקורונה. בהנחה שהצפיפות המספרית בקורונה היא $5 \times 10^8 \#/cm^3$, ושהגודל של הקורונה הוא מסדר גודל של רדיוס השמש, מצאו את המגניטודה הנראית של הקורונה. כמה אור יש בעת ליקוי חמה יחסית ללילה עם ירח מלא?

---

תשובה:

אנחנו מעוניינים כמה מאור השמש מפוזר. לשם כך נחשב את העומק האופטי לפיזור תומסון

$$\tau = \int n\sigma_T dr \approx R n \sigma_T \sim 7\times10^{10} cm \cdot 5\times10^{8} \#/cm^3 \cdot 6\times10^{-25} cm^2 \approx 2\times10^{-5}$$

הואיל והמספר הזה מאוד קטן כמות הקרינה שתפוזר היא:

$$L_{corona} \approx L_\odot (1-\underbrace{\exp(-\tau)}_{\text{מה שנשאר של הקרן המקורית}}) \approx L_\odot \tau$$

המגניטודה של הקורונה תהיה אם כן:

$$m_{V,corona} = m_{V,\odot} - 2.5 \log_{10} \frac{L_{corona}}{L_\odot} = \underbrace{m_{V,\odot}}_{-26.75} - 2.5 \underbrace{\log_{10} \tau}_{-5.3} \simeq -13$$

הירח הוא $m_{V,☾} = -12.75$, כלומר, הקורונה בהירה כמו הירח.

---

4. נתונה גלקסיה בקוטר $d$ הנצפית בהסחה לאדום $z$. מה יהיה הקוטר הזויתי $\theta$ של הגלקסיה בשמיים? רשמו תשובה עד הסדר שני (דהיינו, סדר מוביל + אחד נוסף).

---

תשובה:

אלמנט האורך של רוברטסון ווקר הוא:

$$ds^2 = (c\,dt)^2 - \underbrace{a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]}_{dl}$$

אותנו מעניין הקוטר הפיזי של הגלקסיה: $d$ לעומת ההיקף של היקום, דהיינו, לסכום את ה-$dl$ בכיוון שבו $\theta$ גדל מ-$0$ ל-$2\pi$.

$$\int dl = \int_0^{2\pi} a(t)\, r\, d\theta = 2\pi a(t)\cdot r$$ = "היקף היקום"

אם קוטר הגלקסיה היה היקף היקום, היא הייתה תופסת $2\pi$ רדיאנים. לכן, הזווית היא:

$$\theta = \frac{d}{a(t)\cdot r}$$

בסדר שני (מדפי הנוסחאות):

$$\frac{1}{r} = \frac{a_0 H_0}{c}\underbrace{\left[1 - \frac{1}{2}(1+q_0)z + \cdots\right]^{-1}}_{1+\frac{1}{2}(1+q_0)z} z^{-1}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{a_0 H_0}{cz}\left(1 + \frac{1}{2}(1+q_0)z\right)$$

כמו כן, מההגדרה של $z$:

$$\frac{1}{a} = \frac{(1+z)}{a_0}$$

לכן:

$$\Delta\theta = \frac{d(1+z)}{a_0}\frac{a_0 H_0}{c}\underbrace{(1+z)\left(1 + \frac{1}{2}(1+q_0)z + \cdots\right)}_{\sim 1 + z + \frac{1}{2}(1+q_0)z + \cdots}$$

$$\Delta\theta = \frac{d H_0}{c}\left(1 + \left(\frac{3}{2} + q_0\right)z\right) z^{-1}$$

---

# חלק ב'

5. ☐ 30 נק'. כוכב הומוגני מאסיבי בעל 10 מסות שמש "ומתכתיות" כמו השמש, נמצא בקצה העליון של הסדרה הראשית ושורף מימן בעזרת ה- CNO cycle. ליבתו נשלטת לחץ קרינה. הניחו לשם פשטות אטימות קבועה ליחידת מסה ושהכוכב שומר על עצמו מעורבב. בכמה תשתנה עצמת ההארה של הכוכב אילו היה בולע כוכב לכת כמו כדו"א? נתון שמסת כדור הארץ היא 1/300000 ממסת השמש ואין בו כמעט מימן והליום.

$= 3\times10^{-6}$

---

תשובה:

משוואות המצב בעזרת m (שימושית להומולוגיה) הן:

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \qquad \frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \qquad \frac{dT}{dm} = -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{K}{T^3}\frac{L}{r^4} \Big\} \text{ מעבר קרינה}$$

$$\frac{dL}{dm} = \tilde{\epsilon}_0 \rho T^n \qquad P = \frac{aT^4}{3} \Big\} \text{ נשלט לחץ קרינה}$$

נכתוב את הגדלים בצורה $r=f_r\left(\frac{m}{M}\right)R_*$ וכו'... נקבל משוואות לפונקציות חסרות המימדים ומשוואות לגדלים עם המימדים. המשוואות האחרונות הן:

① $\frac{R_*}{M} = \frac{1}{R_*^2 \rho_*}$ ② $\frac{P_*}{M} = \frac{GM}{R_*^4}$ ③ $\frac{T_*}{M} = \frac{\alpha K_0}{T_*^3}\frac{L_*}{R_*^4}$

④ $\frac{L_*}{M} = \alpha \tilde{\epsilon}_0 \rho_* T_*^n$ ⑤ $P_* = aT_*^4$

שימו לב שהכנסנו פקטור $\alpha$. הסיבה היא שבעקבות נפילת כוכב הלכת אנחנו נגדיל ותוסיף הרבה את המתכתיות אבל את המסה הכוללת הרבה פחות. כמו כן, כאשר אנחנו מגדילים את המתכות, אנחנו מגדילים את האטימות (את זו נניח עם קרמר למשל, כי התהליכים האטומים מתרחשים במתכות להן אלקטרונים לא מיוננים ולא להליום ומימן). אנחנו גם נגדיל בפקטור $\alpha$ את קצב הריאקציה של ה- CNO, כי הקצב פרופורציונלי לכמות ה- CNO שהוא "קטליזטור"). למה שווה $\alpha$?

$$\alpha = \frac{M_{metals}}{M_{metals,0}} = \frac{\overbrace{0.02}^{Z}\, 10 M_\odot + 1\cdot M_\odot \cdot 3\times10^{-6}}{0.02\, 10 M_\odot} = 1.5\times10^{-5} + 1$$

קשר השאלה, המסה משתנה ב-

$$\frac{\Delta M}{M} \simeq \frac{3\times10^{-6}}{10} = 3\times10^{-7}$$

כלומר, אנחנו רוצים לראות כיצד הכוכב משתנה כאשר $\alpha$ משתנה אבל כאשר M נשמר.

תחת ההנחה הנ״ל ש- $M$ קבוע ואילו $\alpha$ לא, נקבל:

(1) $R_*^3 \propto \rho_*^{-1}$ (2) $P_* \propto R_*^{-4}$

(3) $L_* \propto \frac{1}{\alpha} T_*^4 \cdot R_*^4$ (4) $L_* \propto \alpha \rho_* T_*^n$

(5) $P \propto T_*^4$

מ- (2) ו- (5) נקבל: $T_*^4 \propto R_*^{-4}$ או $T_* \propto R_*^{-1}$. נציב ב- (3)

ונקבל:

$$L_* \propto \frac{1}{\alpha} \underbrace{T_*^4 R_*^4}_{\propto 1} \propto \frac{1}{\alpha}$$

כלומר, השינוי היחסי ב- $L_*$ יהיה:

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = -1.5 \times 10^{-5}$$

6. ☐ 30 נק'.

(א) נתון כדור גז בשיווי משקל הידרוסטטי, המקיים קשר פוליטרופי $P = K\rho^\gamma$. הראו שישנו $\gamma$ קריטי שמתחתיו הפרעה תרגום לקריסת כדור הגז.

(ב) נסתכל כעת על אטמוספירה פוליטרופית היושבת על ליבה קשיחה בעלת רדיוס ומסה קבועים. הניחו שמסת הליבה גדולה בהרבה ממסת האטמוספירה, אולם רדיוס האטמוספירה יכול להיות גדול. מהו ה- $\gamma$ הקריטי הפעם? (רמז: הפעם הרדיוס קבוע אבל הצפיפות לא).

---

תשובה:

א. המשוואה ההידרוסטטית היא:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}$$

אם נבצע אינטגרציה על הכל, נקבל:

$$P \sim \int \frac{GM\rho}{r^2}\, dr \sim \frac{GM\rho}{R}$$

כי R הוא הסקלת מרחק האופייני. אם אבל אנחנו משנים את הרדיוס, נשנה גם את הצפיפות לפי:

$$\rho \sim \frac{M}{R^3}$$

לכן, הלחץ ההידרוסטטי ישתנה כמו:

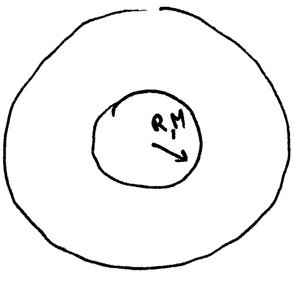
$$P_{hydro} \sim \frac{GM^2}{R^4} \propto R^{-4}$$

מאידך גיסא, אם אנחנו מכווצים את כדור הגז, הצפיפות עולה והלחץ איתה, כמו:

$$P_\gamma \sim K\rho^\gamma \propto R^{-3\gamma}$$

כדי שהמערכת תהיה יציבה כאשר מקטינים את הרדיוס מ- $R_0$ ל- $R_1$, אנחנו צריכים שהלחץ האדיאבטי יגדל יותר מהר מהלחץ ההידרוסטטי (המשמעות היא שהלחץ בסוף יהיה גדול יותר ממה שצריך לשיווי משקל, והכדור יתנפח חזרה). זה נותן:

$$-3\gamma < -4 \rightarrow \gamma > 4/3$$




ב. כעת יש לנו אטמוספירה עם מסה זניחה ורדיוס R אופייני קבוע. היות ו- R קבוע, ההתכווצות תבוא לידי ביטוי ב- $\rho$ אבל לא בשינוי R כמו במקרה של סעיף א.

כיצד P ישתנה עם $\rho$?

$$P_{hydrostatic} \sim \int \frac{GM\rho}{R^2}\, dr$$

$$\sim \frac{GM\rho}{R}$$

הפעם קבוע.

---

המשך תשובה לשאלה 6

מאידך גיסא, השינוי האדיאבטי של הלחץ הוא:

$$P_\gamma \sim K\rho^\gamma$$

הפעם כדי שהמערכת תהיה יציבה אנחנו צריכים ש- $P_\gamma$ יהיה גדול מהלחץ ההידרוסטטי הדרוש לשיווי משקל (כי אז האטמוספירה המכווצת תרצה לחזור חזרה למצב ההתחלתי שלה.

$$\rho^\gamma > \rho \rightarrow \underline{\underline{\gamma > 1}}$$

7. ☐ 30 נק'. העומק האופטי של היקום לפוטון שנפלט ב- $t_e$ ונצפה ב- $t$ הוא $\tau = \int_{t_e}^{t} n(t')\sigma_T c dt'$ כאשר $n(t')$ היא הצפיפות בזמן $t'$ ביניים. נסתכל על יקום שטוח (עם סכום מסה אפלה ומסה בריונית השווה למסה הקריטית) שנשלט ע"י חומר (ולא קרינה).

(א) חשבו את $dt/dz$.

(ב) חשבו את העומק האופטי עד להסחה $z$ כתלות ב- $\Omega_b$ וקבוע הבל היום.

---

תשובה:

(א) משוואות פרידמן השניה, יקום עם $K=0$ ו- $\Lambda=0$ מקיים:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - Kc^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2$$

אם היקום נשלט מסה (ולא קרינה) נקבל:

$$\rho a^3 = \text{const}$$

אז

$$\rho = \rho_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}$$

לכן נקבל:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\, a_0^3\, \overbrace{a^{-3} a^2}^{a^{-1}}$$

~~[illegible]~~

כעת נחשב למה שווה $dt/dz$:

$$\frac{dt}{dz} = \underbrace{\frac{dt}{da}}_{\text{א- } \dot{a} \text{ מלמעלה.}}\ \underbrace{\frac{da}{dz}}_{1}$$

$$(1+z) = \frac{a_0}{a} \longrightarrow \frac{dz}{da} = -\frac{a_0}{a^2}$$

לכן:

$$\frac{dt}{dz} = -\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 a_0^3\right)^{-1/2} a^{1/2}\,\frac{a^2}{a_0}$$

$$= -\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0\right)^{-1/2} a_0^{-5/2}\, a^{5/2}$$

(ב) כעת נחשב את האינטגרל:

$$\tau = \int_{t_e}^{t} n(t')\sigma_T c\, dt' = \int_{z=0}^{z_e} n(z)\sigma_T c\,\frac{dt}{dz}\,dz$$

$$= \int_{z=0}^{z} n_0(1+z)^3 \sigma_T c \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0\right)^{-1/2} \underbrace{a_0^{-5/2}\, a^{5/2}}_{(1+z)^{-5/2}}$$

---

כי הצפיפות חומר הולכת כמו $a^{-3}$

נמשיך. נקבל:

$$\tau = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0\right)^{-1/2}\sigma_T c\, n_0 \underbrace{\int_0^z (1+z)^{1/2}\,dz}_{(1+z)^{3/2}-1}$$

למה שווים $\rho_0$ ו- $n_0$?

הנחת היקום שטוח ומכיל רק מסה:

מדף הנוסחאות

$$\rho_0 = \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

כמו כן,

$$n_0 = \frac{\rho_b}{\mu_e m_p}$$

כאשר $\rho_b$ הוא הצפיפות של הבריונים בלבד. מופיע כאן $\mu_e$ (ולא $\mu$) כי מה שמעניין אותנו הוא לא מספר החלקיקים אלא מספר האלקטרונים החופשיים ורק האלקטרונים מפזרים.

נזכור: $\Omega_b = \rho_b/\rho_c$ ולכן: $\rho_b = \Omega_b\rho_c$, כלומר:

$$n_0 = \frac{\Omega_b \rho_c}{\mu_e m_p}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\tau = \underbrace{\left(\frac{8\pi G}{3}\,\frac{3}{8\pi G}\,H_0^2\right)^{-1/2}}_{H_0^{-1}} \sigma_T c\,\frac{\Omega_b\, 3H_0^2}{8\pi G}\left[(1+z)^{3/2}-1\right]$$

סה״כ:

$$\tau = \frac{3\Omega_b H_0 \sigma_T c}{8\pi G}\left[(1+z)^{3/2}-1\right]$$