האוניברסיטה העברית בירושלים
The Hebrew University of Jerusalem

פרופ' ניר שביב

ניר שביב

<u>אסטרופיסיקה וקוסמולוגיה 77501</u>

מבחן מועד ב' – חורף תשע"ג

- המבחן הוא ללא כל חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
  - דפי הנוסחאות המצורפים עם הבחינה
  - מחשבון
- משך המבחן שעתיים וחצי.
- בבחינה שני חלקים. בחלק הראשון יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות ואילו בחלק השני יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. **בטבלה למטה, יש להקיף את מספרי השאלות שברצונכם שיבדקו.**
- את התשובות, כולל הדרך, יש לכתוב בטופס הבחינה. רצוי להעזר במחברת משבצות כדפי טיוטא. בסוף הבחינה יש להגיש את הטופס וניתן להגיש את המחברת. תוכלו למצוא עותק של טופס הבחינה באתר הקורס.
- שימו לב שסכום הניקוד הוא 99. עד שתי נקודות נוספות הן בעבור סדר. (לכן רצוי להשתמש בטיוטא!)

ב ה צ ל ח ה !

הקיפו את שאלות לבדיקה:	1	2	3	4	5	6	7	סדר	סה"כ
לשימוש הבודק:									

1. (13 נק') נתון כוכב בשיווי משקל. ברגע נתון מגדילים את האטימות במעטפת שלו. מה יקרה לכוכב בעקבות השינוי? הקיפו את התשובה הנכונה בעיגול.

א. הכוכב יתכווץ וליבתו תתקרר.

ב. הכוכב יתנפח וליבתו תתקרר.

ג. הכוכב יתכווץ וליבתו תתחמם.

ד. הכוכב יתנפח וליבתו תתחמם.

נמקו:

אם האטימות גדלה, הכוכב יקרין פחות אנרגיה ממה שהוא מייצר בליבתו. לכן האנרגיה הפנימית שלו תגדל. ממשפט הויריאל, האנרגיה הכוללת הולכת כמו $E_{TOT} \propto -\frac{1}{r}$ לכן הכוכב יתנפח. היות והרכיבים (האנרגיה הפנימית והגרביטציונית) הולכים כמו $1/r$ גם כן אז האנרגיה הפנימית חיובית, היא תקטן עם הגדלת הרדיוס, ולכן הטמפ' תקטן.

---

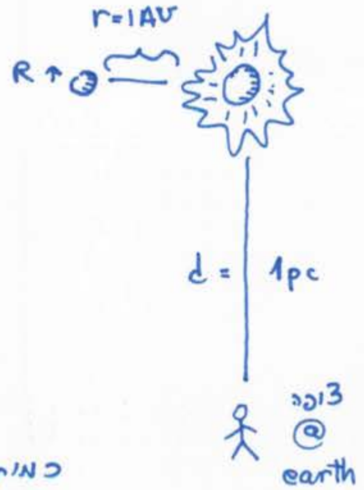
2. (13 נק') הסבירו מדוע כוכבים בעלי מסה נמוכה על הסדרה הראשית הם קונבקטיביים.

תשובה:

כוכבים בעלי מסה נמוכה על הסדרה הראשית הם בעלי טמפ' נמוכה במעטפת שלהם. היות והטמפ' נמוכה, האטימות מאוד גבוהה (מצב האטומים המיוננים חלקית). לכן, כדי להעביר את האנרגיה החוצה ע"י קרינה צריך גרדיאנט טמפ' גדול מאוד, כזה שהוא גדול מהגרדיאנט האדיאבטי. כך שקונבקציה תיבחר להתעורר.

---

3. (13 נק') חשבו בקירוב מה תהיה המגנידוטה הבולומטרית הנראית של כוכב לכת דמוי כדו"א (ברדיוס של 6400 ק"מ) הסובב כוכב דמוי שמש במרחק של יחידה אסטונומית אחת, אם מערכת זו נמצאת במרחק של 1pc מאיתנו.



$L = L_\odot$ הכוכב יפלוט

השטף באיזור כוכב הלכת: $F_p = \dfrac{L_\odot}{4\pi r^2}$

כמות הקרינה (ליח' זמן) שנופלת על הכוכב ושאח"כ מוחזרת:

$$L_p = \underset{\uparrow}{a} F_p \cdot \pi R^2 = \frac{a L_\odot R^2}{4 r^2}$$

ההחזר = אלבדו!

כמות האור הזו תפלוט אבל לא בצורה שווה לכל הכיוונים. לכן, מה שיגיע לכדוה"א הוא:

פקטור גאומטרי מסדר גודל יחידה, ותלוי בזמן!

$$F_E = \frac{\alpha L_p}{4\pi d^2} = \frac{\alpha a L_\odot R^2}{16\pi d^2 r^2}$$

את המגניטודה ניתן לחשב ע"י השוואה למגניטודה הנראית של השמש או לשטף הבולומטרי הדרוש כדי לקבל $M_{v,bol} = 0$. נתחיל באופציה השניה:

$$m_v = -2.5 \log_{10} \frac{F_E}{\underset{2.5\times10^{-5}\ erg\ cm^{-2}s^{-1}}{F_0}} = -2.5 \log_{10} \frac{\alpha a L_\odot R^2}{16\pi d^2 r^2 F_0}$$

ונצ. $\alpha \sim 1$, $a \sim 0.3$, $R \sim 6400km$

ו- $r = 1AU$, $d = 1pc$ ונקבל (נעבוד ב- c.g.s):

$$m_v = -2.5 \log_{10} \frac{0.3 \cdot 4\times10^{33}}{16\pi\ 2.5\times10^{-5}} \left(\frac{6.4\times10^8}{3.1\times10^{18} \times 1.5\times10^{13}} \right)^2 \simeq -24.3$$

4. (13 נק') סופרנובה הנמצאת בהסחה לאדום z פולטת אנרגיה E_{rad} בצורה של אור. למה שווה האינטגרל על שטף הקרינה (fluence באנגלית = אנרגיה ליח' שטח) שימדוד צופה על כדור-הארץ? מצאו תשובה המדויקת עד סדר שני (דהיינו סדר מוביל + אחד נוסף).

תשובה: במרחב אוקלידי, אינטגרל שטף הקרינה יהיה: $E_{rad}/4\pi d^2$

אבל במרחב הלא אוקלידי המתפשט יהיו שני תיקונים. ראשית, שטח הכדור הוא לא $4\pi d^2$ כאשר d הוא המרחק ה- proper distance. מהמטריקה:

$$ds^2 = (c\,dt)^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$

אפשר לראות ששטח הכדור (מה שמכפיל את ה- $d\Omega^2$) אחרי התפשטות כדור האור מהסופרנובה הוא:

$$A = \underbrace{a^2(t=t_0)}_{=a_0} \cdot r^2$$

שנית, בגלל התפשטות היקום, הפוטונים מגיעים אלינו פחות אנרגטיים. לכן אינטגרל השטף שלהם קטן בפקטור a/a_0 (אם היינו רוצים לדעת את השטף זה פקטור a/a_0 נוסף בגלל שהפוטונים "נמרחים" על זמן ארוך יותר). ← כשהפוטון יצא

$$\underbrace{Fl}_{\text{Fluence}} = \frac{E_{rad}}{4\pi \underbrace{a_0^2}_{(\text{היום})} r^2}\underbrace{\left(\frac{a}{a_0}\right)}_{(1+z)^{-1}}$$

כמו כן, עד סדר שני:

$$r \simeq \frac{c}{a_0 H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \cdots\right]$$

לכן:

$$\frac{r^{-2}}{(1+z)} \simeq \frac{a_0^2 H_0^2}{c^2 z^2}\left[1 + \underbrace{\frac{2}{2}}_{(-1/2)\cdot(-2)}(1+q_0)z\right](1-z) \simeq \frac{a_0^2 H_0^2}{c^2 z^2}\left[1 + q_0 z\right]$$

ולבסוף:

$$Fl \simeq \frac{E_{rad}}{4\pi \cancel{a_0^2}}\,\frac{\cancel{a_0^2} H_0^2}{c^2 z^2}(1+q_0 z)$$

---

5. (30 נק') כוכב הומוגני מסיבי נמצא על הסדרה הראשית, ושורף מימן בעזרת ה-CNO cycle. בקירוב, האטימות אחידה בכוכב ונשלטת ע"י פיזור תומסון (פיזור ע"י אלקטרונים חופשיים). כמו כן הלחץ הכולל נשלט ע"י לחץ הקרינה. חישבו בקירוב באיזה פקטור ישתנה רדיוס הכוכב אם כמות "המתכות" Z תגדל בפקטור 2.

תשובה: אם נרשום את משוואות המבנה של הכוכב בעזרת m ואח"כ נפריד לחלק עם מימדים וחלק שתלוי ב- m וכלו חסר מימדים (למשל $P = P_* f_P(m)$)

נקבל את המשוואות הבאות לגדלים עם המימדים:

$$\frac{R_*}{M} = \frac{1}{R_*^2 \rho_*} \qquad \frac{P_*}{M} = \frac{GM}{R_*^4} \qquad L_* = M \tilde{\epsilon} \rho_*^2 T_*^P$$

הכוכב נשלט לחץ קרינה ולכן:

$$P_* = aT_*^4$$

וכן מעבר קרינה:

$$L_* = \frac{ac T_*^4 R_*^4}{M\kappa}$$

מה יקרה עם שינוי ב- Z? κ לא ישתנה כמעט כי Z קטן וכל האלקטרונים החופשיים מגיעים בעיקר מהמימן וההליום. לעומת זאת $\tilde{\epsilon}$ נשלט ע"י ה- CNO cycle ולכן יחסי ל- Z. M ישאר קבוע וכן שאר קבועי הטבע (duh!).

נשווה את L ממעבר קרינה ל- L מיצירה ע"י ריאקציות גרעיניות:

$$\frac{ac T_*^4 R_*^4}{M\kappa} = M \underset{\text{יחסי ל-}Z}{\underset{\uparrow}{\tilde{\epsilon}}} \rho_*^2 T_*^P \longrightarrow T_*^{4-P} R_*^4 \propto Z \rho_*^2$$

ממשוואת הרציפות $\rho_* = \frac{M}{R_*^3}$ ולכן:

$$T_*^{4-P} R_*^4 \propto \frac{Z \overset{\text{קבוע}}{M^2}}{R_*^6} \longrightarrow T_*^{4-P} R_*^{10} \propto Z \quad (**)$$

מהמשוואה ההידרוסטטית:

$$P_* \propto \frac{\overset{\text{קבועים}}{GM^2}}{R_*^4}$$

המשך תשובה לשאלה מס' 5

מלחץ הקרינה: $P_* \propto T_*^4$

ביחד עם המשוואה ההידרוסטטית: $T_*^4 \propto R_*^{-4}$ (*)

נציב את (*) בתוך (**)

$$R_*^{p-4} R_*^{10} \propto Z$$

$$R_*^{p-6} \propto Z \longrightarrow R_* \propto Z^{\frac{1}{p-6}}$$

אם נציב $p \sim 16$ נקבל: $R_* \propto Z^{1/10}$

לכן אם $Z \to 2Z$ נקבל: $R \to \underbrace{2^{1/10}}_{\sim 1.07} R$

6. (30 נק') נתון כוכב בעל מסה M, רדיוס R, ועצמת הארה L.

א. מצאו את סקלת הגובה h עליה יורד הלחץ באיזור הפוטוספירה בפקטור e. הניחו לשם פשטות שבאיזור הפוטוספירה הטמפ' אחידה ושווה לטמפ' האפקטיבית של הכוכב.

ב. מהו בקירוב התנאי על מהירות הקול האיזותרמית באיזור זה כדי שסקלת הגובה תהיה קטנה משמעותית מרדיוס הכוכב? (מהירות הקול האיזותרמית היא $v_s^2=P/\rho$).

ג. אם האטימות באיזור זה היא , חשבו בקירוב מהי הצפיפות בפוטוספירה.

תשובה: א. המשוואה ההידרוסטטית היא:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho$$

אם הטמפ' אחידה, אזי ניתן לכתוב: $P = v_s^2 \rho$ כאשר v_s היא מהירות הקול האיזותרמית: $v_s \equiv \sqrt{P/\rho}$. במקרה זה נקבל:

$$v_s^2 \frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho \longrightarrow \frac{d\rho}{dr} = -\underbrace{\frac{GM}{v_s^2 r^2}}_{\text{יחידות של אחד חלקי מרחק}}\rho$$

עבור סקלת מרחק קטנה מהרדיוס, המשוואה מתארת דעיכה אקספוננציאלית של ρ, עם סקלת דעיכה:

$$h = \frac{v_s^2 r^2}{GM} = \frac{v_s^2}{g} = 2\frac{v_s^2 R}{v_{esc}^2} \qquad \left(\tfrac{1}{2}v_{esc}^2 = \frac{GM}{R}\right)$$

דרכים אחרות לכתוב

ב. אנו דורשים ש- h יהיה קטן בהרבה מ- R, לכן:

$$h \ll R \rightarrow 2v_s^2\frac{R}{v_{esc}^2} \ll R \rightarrow \underline{v_s^2 \ll v_{esc}^2}$$

המשך תשובה לשאלה מס' 6

ג. הפוטוספירה מוגדרת בתור האיזור שהעומק האופטי שם מה-∞ הוא כיחידה. (למעשה $2/3$ אבל לא נכנס לדקויות!).

היות והצפיפות אקספוננציאלית:

צפיפות בפוטוספירה

$$\rho = \rho_{ph} \exp(-z/h)$$

העומק האופטי יהיה לכן:

פוטוספירה

$$1 \simeq \tau \equiv \int_{z=0}^{z=\infty} K_m \rho(z)\, dz =$$

$$= \int_0^\infty K_m \rho_{ph} \exp(-z/h)\, dz = K_m \rho_{ph} h$$

לכן:

$$\rho_{ph} \simeq \frac{1}{K_m h} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{esc}}{v_s}\right)^2 \frac{1}{R K_m}$$

7. (30 נק') יקום בצפיפות נמוכה ניתן לקירוב ע"י הזנחת הצפיפות והלחץ במשוואות פרידמן. הניחו גם כי אין קבוע קוסמולוגי.
א. מהו הפתרון למשוואות פרידמן, מלבד הפתרון הטריוויאלי?
ב. מהו התנאי על היקום כדי שפתרון כזה יתקיים? (רשמו תנאי מתמטי, לא במילים!)
ג. מצאו את הקשר בין המרחק בזמן נתון (proper distance) לבין ההסחה (redshift) ביקום זה.

א' 5 תשובה: נסתכל על משוואת פרידמן על $\dot{a}$:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - Kc^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} a^2$$

במקרה בו אין קבוע קוסמולוגי Λ ואיבר הצפיפות זניח, נקבל:

$$\dot{a}^2 = -Kc^2 \longrightarrow da = \sqrt{-K}\, c\, dt$$

אינטגרציה נותנת:

$$a = \sqrt{-K}\, ct + C_1$$

אם נגדיר את $t=0$ כזמן בו $a=0$ נקבל $C_1=0$, דהיינו:

$$\underline{a = \sqrt{-K}\, ct}$$

{ עבור $K=0$ הפתרון הוא $\dot{a}=0$ ← $a=\text{const}$ ← פתרון טריוויאלי. ללא התפשטות. עבור $K=+1$ נקבל פתרון מורכב (= לא פיסיקלי). }

ב' 5 כדי שהפתרון הזה יתאר את היקום אנו צריכים שאיבר הצפיפות אכן יהיה זניח:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho \underbrace{a^2}_{=(ct)^2} \ll \overbrace{(-K)}^{+1} c^2 \longrightarrow \frac{8\pi G}{3}\rho c^2 t^2 \ll c^2$$

$$\downarrow$$

$$\rho \ll \frac{3}{8\pi G t^2}$$

כמו כן, נדרוש שאם ישנו קבוע קוסמולוגי הוא יהיה מספיק קטן:

$$\underbrace{-K}_{+1} c^2 \gg \frac{|\Lambda| c^2}{3} \underbrace{a^2}_{(ct)^2} \longrightarrow |\Lambda| \ll \frac{3}{c^2 t^2}$$

ג.

המשך תשובה לשאלה מס' 7

נסתכל על המטריקה של היקום:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2\left[\frac{dr^2}{(1-Kr^2)} + r^2 d\Omega^2\right]$$

אנו בוחנים כעת אוביקט (למשל גלקסיה) הנמצא בהסחה z. היות ואנו מסתכלים בעזרת אור, ואנחנו דורשים לקשר את ההסחה לפרופר דיסטנס ע"י תנועת פוטונים הנוליות $ds=0$ ולכן, עבור הקרן אור:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = \int_{r=0}^{r} \frac{dr}{(1-Kr^2)^{1/2}} = \sinh^{-1}(r) \qquad (\text{כי } K=-1)$$

ולכן:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{ct} = \ln\frac{t_0}{t} \underset{a=ct}{=} \ln\frac{a_0}{a_1} = \ln(1+z)$$

ולכן ה-proper distance מוגדרת ע"י:

$$d_p \equiv \int \underbrace{\sqrt{g_{rr}}}_{\text{החלק של המטריקה שמכפיל את } dr^2} dr \underset{\text{מחושב היום.}}{=} a_0 \int_0^r \frac{dr}{(1-Kr^2)^{1/2}} = a_0 \sinh^{-1}(r)$$

נציב בשורה הקודמת:

$$d_p = a_0 \ln(1+z)$$