



פרופ' ניר שביב

אסטרופיסיקה וקוסמולוגיה 77501

מבחן מועד א', סמסטר חורף תשע"ג

- המבחן הוא ללא כל חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
 - דפי הנוסחאות המצורפים עם הבחינה
 - מחשבון
- משך המבחן שעתיים וחצי.
- בבחינה שני חלקים. בחלק הראשון יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות ואילו בחלק השני יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. יש לסמן במשבצת שליד כל שאלה אם ברצונכם שהיא תבדק.
- את התשובות, כולל הדרך, יש לכתוב בטופס הבחינה. רצוי להעזר במחברת משבצות כדפי טיוטא. בסוף הבחינה יש להגיש את הטופס וניתן (אך לא חובה וגם לא רצוי) להגיש את המחברת. תוכלו למצוא עותק באתר.
- שימו לב סכום הניקוד הוא 99. עד שתי נקודות נוספות הן בעבור סדר. (לכן רצוי להשתמש בטיוטא).

כ ה 3 ם ה !

לשימוש הבודק:

1	2	3	4	5	6	7	סדר	סופי

חלק א'

1. 13 נק'. נתון כוכב בשיווי משקל. ברגע נתון מכבים את הראקציות הגרעיניות בליבתו. מה יקרה לכוכב? הקיפו את התשובה הנכונה בעיגול.

- (א) הכוכב יתכווץ ויתקרר.
- (ב) הכוכב יתנפח ויתקרר.
- (ג) הכוכב יתכווץ ויתחמם.
- (ד) הכוכב יתנפח ויתחמם.

נמקו:

הוא והמכב ימשיך לקבוע עצמו יבוי סאונגיה זכאנית, הנוט יהיה חייב לרבות סאונגיה כוחות נמוכה יותר. היות והסאונגיה הכוחות היא:

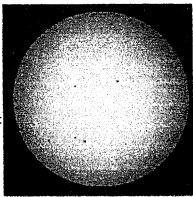
$$U = -\frac{GM}{r}$$

הכוחים יהיה חייב לקטון.

מהמשפט הנויכיא, סאונגיה זוי מוכבת מאנרגיה זכאנית סאונגיה קינטי (תנועת) חילופית אך קטנה יותר הזוכה (פ) אם מצויה זכ (שאלה קאסי). כלומר:

$$kT \propto \frac{GM}{r}$$

כך שכש- r קטן T זכא.



2. 13 נק'. הסבירו מדוע קצוות השמש בתמונה נראים כהים יותר.

תשובה:

האפקט הויל של Limb darkening. הויל נובע מהעובדה שקיני האור,

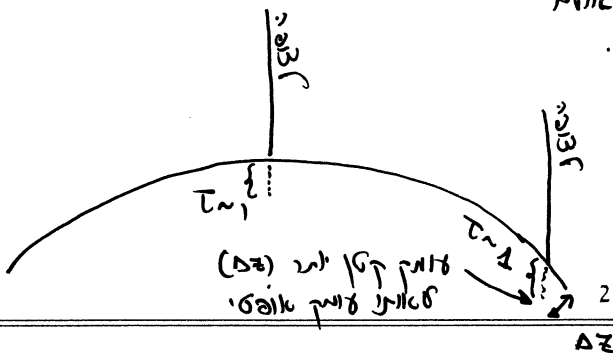
בין אם הן מגיעות בזווית לפני השטח או בזווית זכורה מהאורך, מגיעות לצופה ב- ∞ מאיזו בעזרת אופטי. מסביר זכא מ'צה:

$$\tau \approx \int k_m \rho ds$$

אולם, היות והקין הבהיר בזווית זכורה מהאורך עובר יותר חומר זכא עוזק ז (נתון),

τ יהיה בהכרח יותר קטן לשפה אולם חיה קהלת קינטיה בטמפ' ל'ז השפה כ'ז.

שהקינים שקין החוצה. לכן, העוזק הפיזיקלי יותר מתקנה לטמפ' נמוכה יותר חשטל קינה קטן יותר.



3. □ 13 נק'. נתון כוכב המתואר ע"י פוליטרופה עם אינדקס n . הכוכב מסתובב לאט במהירות זוויתית Ω . רשמו ביטויים לאנרגיה הגרביטציונית ולאנרגיה הקינטית הסיבובית של הכוכב כתלות במסת הכוכב, ופונקציית הפתרון החסר מימדי של משוואת ליין אמדן. יש להשאיר את האינטגרלים כביטויים חסרי מימדים.

תשובה:

האסימטר, גזירת שני צדדי: $\rho = \rho_c \phi^n, r = l \xi, R = l \xi_1, \rightarrow l = R / \xi_1$

צד האסימטר, נחשב את המסה וממנה את ρ_c : $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi l^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \phi^n d\xi = 4\pi l^3 \rho_c \Gamma(n, 2)$

לפי: $\rho_c = \frac{M}{4\pi l^3} \frac{\xi_1^3}{\Gamma(n, 2)}$

נחשב כעת את האנרגיה הקינטית הזכיבוינית: $U_{grav} = - \int_0^R \frac{Gm(r)}{r} dm$

$$= - \int_0^R \frac{G}{r} \left(\int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \right) 4\pi r^2 \rho(r) dr = -16\pi^2 G l^5 \rho_c^2 \int_0^{\xi_1} \frac{1}{\xi} \left(\int_0^{\xi} \phi^n(\xi') \xi'^2 d\xi' \right) \xi^2 \phi^n(\xi) d\xi$$

$$= -16\pi^2 G \frac{R^5}{\xi_1^5} \frac{M^2}{16\pi R^6} \frac{\xi_1^6}{\Gamma^2(n, 2)} I = - \frac{GM^2}{R} \frac{\xi_1}{\Gamma^2(n, 2)} I$$

את I ניתן לפתור בצורה פשוטה יותר אם נבנה להו חלק מהשאלה.

מומנט ההתמז הוא: $I = \int \rho r^2 dV = \int \rho \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2} \frac{r^2 \sin \theta}{r \sin \theta} dr d\theta d\varphi =$

$$= 2\pi \int_0^R r^4 \rho(r) \left(\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) dr = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r) r^4 dr$$

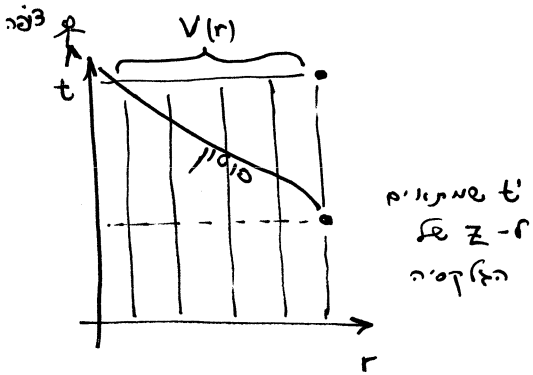
$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$ אולי אפשר היה לראות זאת בלייבול, זה אינטגרל חסר מימדים.

האנרגיה הקינטית הסיבובית היא: $E_k = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{4\pi}{3} \Omega^2 l^5 \rho_c \int_0^{\xi_1} \phi^n \xi^4 d\xi =$

$$= \frac{4\pi}{3} \Omega^2 \frac{R^5}{\xi_1^5} \frac{M}{4\pi R^3} \frac{\xi_1^3}{\Gamma(n, 2)} \Gamma(n, 4) = \frac{1}{3} M R^2 \frac{\Gamma(n, 4)}{\xi_1^2 \Gamma(n, 2)}$$

4. נתון אוסף של גופים הממלא את היקום בצפיפות אחידה. הגופים אינם נוצרים או נהרסים. חשבו עד לסדר שני למה שווה מספר הגופים הכולל שיש עד הסחה z . דהיינו, מצאו ביטוי ל- $N(z)$ כתלות בצפיפות הגופים בסביבתנו n וכתלות בקבוע הבל היום H_0 ומקדם התאווה q_0 . כל זאת בסדר המוביל המכיל את q_0 .

תשובה:



נסתכל במינה r, t . במינה זה, האפסים (רזולוציה גלקטית) שומרים על r שלבים. לפי זה שמעניין אותנו זה הנפח $V(r)$ היום. מכפילים בצפיפות היום n הגלקטית ואחריהן קושי בין r ל- z .

כדי לקבל את $V(r)$ נסתכל ב- מטריקת הוברטסון-ווקר ונראה:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

לנתון האות, הסטה של קושי בקואורדינטה r היום:

$$A = a(t_0)^2 r^2 \cdot 4\pi$$

למאונך ציבה A $d\theta$ ו- $d\varphi$.

($a(t_0)$ כי מעניין אותנו הנפח היום).

האנליק נפח n קושי בקואורדינטה r וזהו dr היום:

$$dV = A \frac{a_0 dr}{1-kr^2} = \frac{4\pi r^2 a_0^3}{1-kr^2} dr$$

$$V(r) = 4\pi a_0^3 \int \frac{r^2 dr}{1-kr^2}$$

לפי:

היום ואתנו מעונינים בסדר המוביל + אחר (נספר) והיום והאנליק זה מכיל קושי כואמן וג'יש (ומ'א), כי האנליק (סימטרי) האנליק בסדר שמעניין אותנו נשן:

$$V(r) \approx \frac{4\pi}{3} a_0^3 r^3 (1 + O(r^2))$$

כעת נכפל בצפיפות ונבטא את r בעזרת z :

$$N(z) = nV(r(z)) = \frac{4\pi n}{3} a_0^3 \frac{c^3}{a_0^3 H_0^3} \left[z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \dots \right]^3$$

$$\approx \frac{4\pi n}{3} \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 \left(z^3 - \frac{3}{2}(1+q_0)z^4 + \dots \right)$$

חלק ב'

5. □ 30 נק'. כוכב הומוגני הנשלט לחץ גז נמצא על הסדרה הראשית ושורף מימן בעזרת ה- pp chain. הניחו לשם פשטות אטימות קבועה ליחידת מסה. בכמה תשתנה עצמת ההארה של הכוכב אילו G היה גדול יותר באחוז?

תשובה:

(רשום את משוואת המסה הכוכב בצורה m):

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad \frac{dT}{dm} = \frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{K}{T^3} \frac{L}{r^4} \quad \frac{dL}{dm} = \epsilon = \tilde{\epsilon} \rho^2 T^p$$

$\frac{dr}{dm}$ - ענ' נחל
 $\frac{dp}{dm}$ - ענ' הידרוסטטי
 $\frac{dT}{dm}$ - ענ' קרינה
 $\frac{dL}{dm}$ - ענ' אנרגיה גולמית

אם נציג $x = \frac{m}{M}$ ונציג את המסה כפונקציה של x (מניחים קבוע) $r = f_r(x) R$ וכנראה, נקרא שההיקף של הנימנים נתון:

$$\frac{R_*}{M} = \frac{1}{R_*^2 \rho_*} \quad \frac{P_*}{M} = \frac{GM_*}{R_*^4} \quad \frac{T_*}{M_*} = \frac{1}{ac} \frac{K}{T_*^3} \frac{L_*}{R_*^4} \quad L_* = M \tilde{\epsilon} \rho_*^2 T_*^p$$

משוואת המסה > 3 (נתון):

$$P_* = \frac{\rho_* k T_*}{\mu m_p}$$

נחשב את L_* משוואת המסה הקבועה:

$$L_* = \frac{ac T_*^4 R_*^4}{M_* k}$$

הצמד M - L קבוע, נשמור עליו ונציג את שאר הנתונים. נראה איך L_* משתנה עם הנתונים שכן יבנים מהשתנות R_*, P_*, T_* וכו'... וכן G .

$$L_* \propto T_*^4 R_*^4 \propto \frac{P_*^4}{\rho_*^4} R_*^4 \propto \frac{G^4}{R_*^{16}} \frac{R_*^4}{\rho_*^4} \propto \frac{G^4}{R_*^{16}} R_*^{4+12} \propto G^4$$

משוואת המסה \rightarrow $\frac{P_*^4}{\rho_*^4} R_*^4$
 ההידרוסטטי \rightarrow $\frac{G^4}{R_*^{16}}$
 משוואת המסה \rightarrow R_*^{4+12}

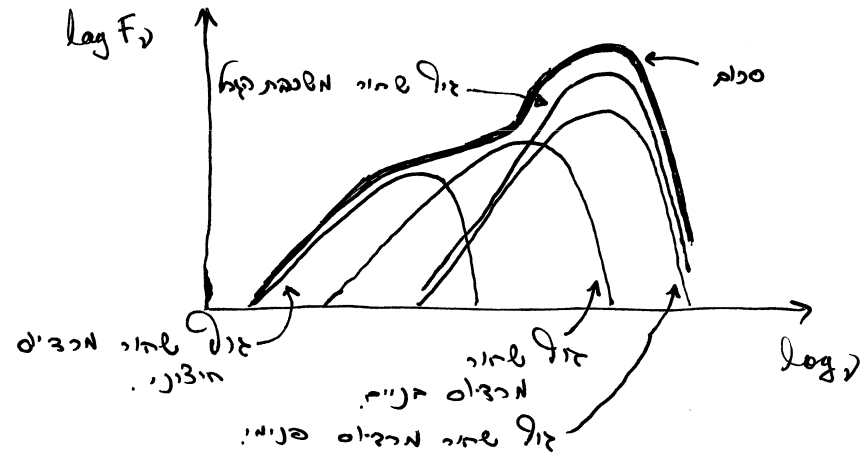
לכן, אם G יגדל ב- 1%, L יגדל ב- 4%.

$$\frac{\Delta L}{L} = \left(\frac{1+\Delta G}{G}\right)^4 - 1 \approx 4 \frac{\Delta G}{G} \approx 0.04$$

באחוז 4.

$$\nu_{max} \approx \frac{kT}{h} \approx \begin{cases} 10^{15} \text{ Hz} & \text{for } 45,000 \text{ K} \\ 2 \times 10^{16} \text{ Hz} & \text{for } 10^6 \text{ K} \end{cases}$$

כדי ייתן אנו:



למה יבא כן:

ק. גם הננס הלבן מסתובב במהירות שהיא חצי מהמהירות המקסימלית ואי המבורג קי המשווה תמיד חצי מהמהירות הקלאסית. המשווה הוא שהאנרגיה קינטיקה מסה M חוצה הנפח המצטבר אנום $\frac{1}{2}$ מהמהירות:

$$\text{פוטנציאל מסה: } -\frac{1}{2} \frac{GM}{R_{WD}} \rightarrow -\frac{GM}{R_{WD}}$$

אנרגיית קינטיקה מסה M חוצה הנפח המצטבר.

הפסד אנרגיה $\&$ התורה (קיה' מסה) A פני הננס תמיד:

$$U_{bind} = U_{grav} + U_{kin} = -\frac{GM}{R_{WD}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{GM}{R_{WD}} \right)$$

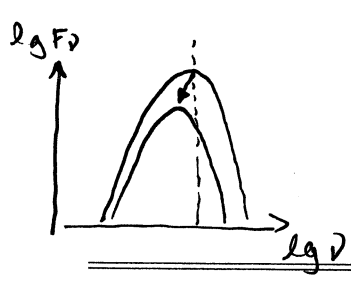
אנרגיית קינטיקה מסה M חוצה הנפח המצטבר.

$$\text{פוטנציאל מסה: } -\frac{1}{2} \frac{GM}{R_{WD}} \rightarrow -\frac{GM}{R_{WD}} + \frac{1}{8} \frac{GM}{R_{WD}}$$

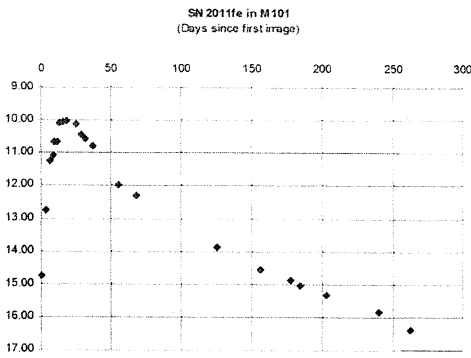
בחינו, נשתהי כן $\frac{3}{4}$ מהמהירות המקסימלית. נקבל:

$$L_{be} \rightarrow \frac{3}{4} L_{be}$$

$$T_{be} \propto L_{be}^{1/4} \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} T_{be} \approx 0.93 T_{be}$$



תמיד יחידה בצורה $\frac{3}{4}$ מהמהירות המקסימלית.



נתונה עקומת ההארה של SN 2011fe כפי שנמדדה על כדור"א. נניח לשם פשטות כי זו המגניטודה הבולומטרית (ולא דרך פילטר נתון). הסופרנובה התרחשה ב-M101 שנמצאת במרחק של 21 מיליון שנות אור מאיתנו.

(א) נתון שלקובלט 56 יש זמן דעיכה (פקטור e) של 111 יום. כמו כן נתון שכמות האנרגיה המשתחררת ליחידת מסה בהתפרקות זו היא $\epsilon_{Co} = 7.9 \times 10^{16} \text{ erg/gr}$. חשבו מה היה סכום הקובלט 56 וניקל 56 בתחילת הפיצוץ.

(ב) נתון שמהירות החומר בפיצוץ הוא 15000 ק"מ לשנייה. העריכו כמה חומר יש במעטפת שמועפת.

תשובה:

ט. היות והזמן חיים של קובלט ארוך הרבה יותר מזה של ניקל, יום נסתם בזמן שזוהי משמעותית. למען הצניחה של ניקל (100d) ולמען הצניחה האופינית (הצניחה שיואיים בעקומת ההארה), נקח זריחה שנשטט "הצניחה האקספוננציאלית של הקובלט".

נסתם ב- $t = 100 \text{ d}$. המגניטודה הבולומטרית הנגיג היא: $M_{bol} \approx +13$

המגניטודה האבסולוטית תפיה:

$$M_{bol} \approx +13 - 5 \log_{10} \frac{2.1 \times 10^7 \text{ ly} / (32 \text{ ly/pc})}{10} \approx -16.2$$

38 מסה הכאיה ב- 100d תפיה אה כן: $M_{bol,0} = +16.2 + 4.8$

$$L_{100} \approx \underbrace{4 \times 10^{33} \text{ erg/sec}}_{L_0} \cdot 10^{+16.2 + 4.8} = 1.0 \times 10^{42} \text{ erg/sec}$$

זמן הצניחה של קובלט הוא $\tau_{Co} = 111 \text{ d}$, רזן ב- $t = 100 \text{ d}$ כמות המסה

$$L_{100} = \frac{\epsilon_{Co} \cdot \Delta M_{Co,100}}{\tau_{Co}}$$

$$\Delta M_{100} = \frac{\tau_{Co} L_{100}}{\epsilon_{Co}} = \frac{111 \text{ d} \cdot 24 \cdot 3600 \frac{\text{sec}}{\text{d}} \cdot 10^{42} \text{ erg/sec}}{7.9 \times 10^{16} \text{ erg/gr}} = 1.3 \times 10^{32} \text{ gr} = 0.07 M_{\odot}$$

הזר וכמות הקובלט צוענת אקספוננציאלית, הקסי בין הכמות בזמן t והכמות ההתחלתית (שייחיה אהזר באקיה און כנה ניקל!)

$$\Delta M_{100} = \exp(-t/\tau_{Co}) \Delta M_0$$

$$\Delta M_0 = \Delta M_{100} \exp(t/\tau_{Co}) = 0.07 M_{\odot} \exp\left(\frac{100 \text{ d}}{111 \text{ d}}\right) = 0.17 M_{\odot}$$

ה שיא הפליטה מתקבל כאשר זמן המעוף למתאם הפיזיקלי שווה בערך לזמן הפיזיקלי.
 לפי התנאי, צי קורה בערך ב- $t = 15 \text{ days}$.

מנסחא דג בצד הנסחאולר נקבל:

$$M_{\text{env}} \sim \frac{4\pi r^2 t \cdot t_{\text{diff}}}{f_{\text{km}}}$$

נקח אטימור של תומפסון (פיזיקאי אקדמיניום). הילר ואנחנו לא יוצאים כמה מימן יש, km יכיל קנע בין 0.2 ל- 0.4 ביחידות של cm^2/g . נקי אר העיקר המכני. כמו כן, עלא אונפארמזיה נוספת, נקי $f \sim 1$.

הסיכתינו למסה במעטפת תפיה אם כן:

$$M_{\text{env}} \approx \frac{4\pi \cdot 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} (15 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ sec})^2 \cdot 1.5 \times 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}}{1 \cdot 0.3 \text{ cm}^2/\text{g}} \approx 3 \times 10^{33} \text{ g}$$

$$\approx 1.5 M_{\odot}$$

כמיובן למצוה זו לא הני מצוקר בגלל גרם מסדי גובר יחידה להנחתו או עלא יוצני. אבר עדין מתקבל $M_{\text{env}} \approx 1 M_{\odot}$

זה לא מתייץ בהמשך של סופרנובה מסוג Ia שמקורה בענף אמן שקיים.