מעבר קרינה

על מנת לפתור את בעיית מבנה הכוכבים, יש להשתמש במספר משוואות:

1) המשוואה ההידרוסטטית: $\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho$

2) משוואת עזר לחישוב המסה: $\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$

3) משוואת מצב. במקרה הפשוט היה קשר פוליטרופי מהצורה: $P = K\rho^{\gamma}$

אולם במקרה הכללי ישנן משוואות יותר מורכבות, לדוגמא,

עבור גאז אידיאלי: $P = \frac{k}{\mu m_p}\rho T$

במקרה כזה, נכנסת הטמפרטורה למשחק ויש למצוא משוואות מהן ניתן יהיה למצוא את T. המשוואות הללו הן:

4) משוואה לקצב יצירת האנרגיה בכוכב (דהיינו, ראקציות גרעיניות), אותן נראה בהמשך.

5) משוואה למעבר אנרגיה. ספציפית, מעבר אנרגיה יכול להתרחש ע"י:

א. מעבר קרינה (ז.א. העברת אנרגיה ע"י תנועה של פוטונים).

ב. קונבקציה: כאן העברת האנרגיה נעשית ע"י תנועה של אלמנטים מקרוסקופיים (דהיינו, גדולים). אלמנטים חמים עולים למעלה וקרים יורדים למטה (כך שנטו יש מעבר חום למעלה). תופעה זו מתרחשת בסיר עם מים רותחים.

ג. הולכה. כאן, העברת האנרגיה נעשית ע"י התנועה המיקרוסקופית של החלקיקים. חלקיקים מהירים (חמים) בצד אחד מתנגשים עם חלקיקים קרים בצד שני ומעבירים אנרגיה (חום) מהצד החם אל הקר.

אנו נתרכז באפשרות הראשונה בהרצאה זו

נניח לשם פשטות כי:

א. התווך הוא "אפור" (Gray Approximation). משמעות ההנחה היא כי: הסיכוי לבלוע או לפזר פוטון אינו תלוי באורך הגל.

ב. נניח כי אין פיזור כלל. כלומר פוטון יכול רק להפלט או להבלע.

נגדיר את האטימות K_ν בצורה:

* $K_\nu dx$ הינו הסיכוי שפוטון יבלע אחרי מעבר מרחק dx נתון. (יחידות K_ν הן 1/אורך. כלומר $1/K_\nu$ יהיה אורך אופייני שפוטון יכול לעבור לפני שהוא נבלע).

* נגדיר את I כעוצמת הקרינה ליחידת זווית מרחבית ביחידות: $erg/cm^2 s\, sr$. עוצמה זו תתאר את שטף הקרינה בכיוון מסוים.

המשוואה שתתאר אותו תראה:

$$\underbrace{dI}_{} = -\underbrace{K_\nu I\, dx}_{} + \underbrace{B(T)\, dx}_{}$$

השינוי בשטף הקרינה

כמות הבליעה הכוללת; $K_\nu dx$ הוא סיכוי הבליעה לפוטון בודד.

הפליטה, היא תהיה תלויה בטמפ' ונניח אותה בהמשך.

אם אין פליטה, $B=0$ ונקבל:

$$\frac{dI}{dx} = -K_\nu I \rightsquigarrow I = I_0 \exp(-K_\nu x)$$

כלומר אם בנקודה מסוימת ישנה קרן בעלת שטף I_0, אזי עוצמת הקרן (ומספר הפוטונים) יקטן אקספוננציאלית עם המרחק.

הסיכוי שפוטון שכבר היה קיים מ-$x=0$ להבלע ב-x נתון הוא:

$$P(x) \propto -\frac{dI}{dx}\Big|_x = K_\nu I(x) = K_\nu I_0 \exp(-K_0 x)$$

תנאי הנירמול (כדי למצוא ונשים "=" במקום "$\propto$") מתקבל מכך שסיכוי הבליעה הכולל הוא 1:

נקבל:

$$P(x) = \frac{k_\nu I_0 \exp(-k_\nu x)}{\int k_\nu I_0 \exp(-k_\nu x)dx} = \frac{\exp(-k_\nu x)}{\int \exp(-k_\nu x)dx}$$

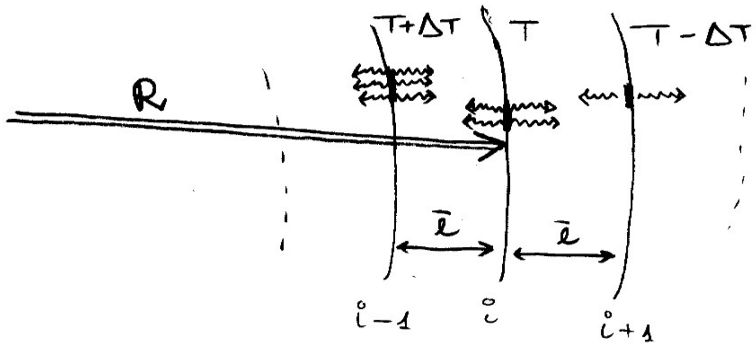
כך ש- $\int_0^\infty P(x)dx = 1$. המרחק הממוצע (תוחלת המרחק) אליו יגיע הפוטון, הוא:

$$\bar{l} = \int P(x)x\,dx = \frac{\int x \exp(-k_\nu x)dx}{\int \exp(-k_\nu x)dx} = k_\nu^{-1}$$

כלומר, k_ν^{-1} הוא גם המרחק הממוצע אליו יגיע פוטון לפני שיבלע.

מודל פשוט למעבר קרינה (ולא מדויק!).

נבנה כעת מודל פשוט, ולא הכי מדויק למעבר קרינה בהתבסס על העובדה הנ"ל. במקום שפוטונים ינועו מרחק x בהתפלגות אקספוננציאלית עד שהם נבלעים, נניח ראשית שהם כולם נעים מרחק $\bar{l}$ במדויק בין הפליטה והבליעה. כמו כן, נניח שכל החומר מרוכז בשכבות. כל אחת נמצאת בטמפ' במעט שונה אחת מהשניה:



כל שכבה נמצאת בשיווי משקל עם שכנותיה. כל שכבה פולטת σT_i^4 לכל אחד משני הצדדים שלה. שכבה i מקבלת מצד אחד $(i+1)$ פחות קרינה ומהצד השני מקבלת יותר כך שבסך הכל יש מעבר קרינה לצד ימין.

סך השטף בין i לבין $i+1$ הוא:

$$F = -\sigma T_{i+1}^4 + \sigma T_i^4 = -\sigma \underbrace{(T_i - \Delta T)^4}_{\approx T_i^4 - 4T_i^3\Delta T \text{ עבור } \Delta T \ll T_i} + \sigma T_i^4$$

$$\cong 4\sigma T_i^3 \Delta T$$

אולם:

$$\Delta T = \frac{dT}{dx}\,\bar{\ell}$$

כלומר:

$$F = 4\sigma T^3 \frac{dT}{dx}\,\bar{\ell} = 4\sigma T^3 \frac{dT}{dx}\,\frac{1}{k_\nu}$$

לעיתים, במקום לעבוד עם k_ν (האטימות ליח' נפח שנקרא גם extinction) עובדים עם $k_m = k_\nu/\rho$ שהיא האטימות ליח' מסה. k_ν הוא הגודל שיותר טבעי לעבוד איתו כאשר מדברים על מעבר קרינה. אולם, k_m הוא הגודל היותר טבעי של החומר הוא למעשה שטח הפיזור/בליעה של אטום σ אחד כפול מספר האטומים ליח' מסה (N_A/μ).

במבנה כוכבים, הגודל היותר טבעי לעבוד איתו הוא עוצמת הארה הכוללת ולא השטף:

$$\underbrace{L_{rad}}_{\text{מהקרינה}} = 4\pi r^2 F = \frac{4\pi r^2 \sigma T^3}{k_\nu}\,\frac{dT}{dx}$$

עד כדי פקטור $4/3$ זו הנוסחא הבסיסית למעבר קרינה בכוכב. מחוץ לאיזור בו הכוכב מייצר אנרגיה ובהנחה שאין מעבר אנרגיה ע"י שיטה אחרת (לדוגמא, קונבקציה), L_{rad} יהיה קבוע כך שנקבל משוואה מהצורה:

$$\frac{dT}{dx} = \dots$$

בעזרתה נוכל לחשב את הטמפ' בכוכב.

דרך מקורבת להגיע למשוואת מעבר הקרינה היא ע"י קירוב הכוכב ל"קליפות" והשוואת השטף היוצא לזה הנכנס. דרך זו נותנת תוצאה, שעד קבוע "גיאומטרי" היא התוצאה הנכונה. יתרונה הוא שניתן בקלות לראות את הפיסיקה.

דרך שניה, מדויקת היא שימוש במשוואת מעבר הקרינה $\left(\frac{dI}{ds}=\dots\right)$ וע"י אינטגרציה על המרחב שמסביב לנקודה מסוימת, לקבל את עוצמת הקרינה I בכיוונים שונים, וע"י אינטגרציה נוספת לקבל את הביטוי לשטף F המלא. שיטה זו מדויקת, אפשר איתה לראות את התהליך הפיסיקלי, אבל היא מורכבת מבחינה מתמטית. לכן, היא ניתנת כדוגמה (והיא לא חלק פורמלי מהקורס).

דרך שלישית מדויקת ופשוטה היא ע"י שימוש בקשר בין אנרגיה לתנע בשדה הקרינה. הבעיה בדרך זו היא שלא ברור ממנה מהו המקור של שטף הקרינה!

<u>משוואת מעבר הקרינה מהקשר בין תנע לאנרגיה</u>

נסתכל על אלמנט נפח, ונרשום את הכח שהקרינה מפעילה עליו בשתי דרכים.

<u>ראשית</u>: אם עובר שטף $\vec{F}$ (של אנרגיה) דרך האלמנט, שטף התנע יהיה $\frac{\vec{F}}{c}$ (כי מדובר בגז פוטונים חסרי מסה).

$\kappa_\nu dx$ הוא הסיכוי לבליעה של פוטון אחרי מעבר dx. לכן, קצב התנע שנשאר בתוך הנפח dx^3 יהיה:

$$\underbrace{\frac{\bar{F}}{c}\cdot\Delta x^2}_{\text{שטף התנע כפול שטח החתך}}\cdot\underbrace{\kappa_\nu dx}_{\text{החלק מהתנע שנשאר באלמנט נפח}}$$

גודל זה יהיה הכח שמופעל על האלמנט. (כח = תנע ליח' זמן).

(2)

מצב שני: הכח ליחי' נפח שמפעיל אלמנט עם גרדיאנט בלחץ P_{rad} יהיה:

$$-\underbrace{\nabla P_{rad}}_{\text{כח ליחי' נפח}} \cdot \underbrace{dx^3}_{\text{נפח כולל}}$$

אם נשווה נקבל:

$$-\nabla P_{rad}\, dx^3 = \frac{\vec{F}}{c} k_\nu\, dx^3$$

אולם, עבור גז קרינה מתקיים:

$$P_{rad} = \frac{E}{3}$$

E – צפיפות האנרגיה של הקרינה.

ולכן:

$$\vec{F} = -\frac{c}{3k_\nu} \bar{\nabla} E$$

זוהי משוואת מעבר הקרינה (בקרוב הדיפוזיה).

(1)

המודל של אדינגטון ועצמת ההארה של אדינגטון

נסתכל שוב על פוליטרופה $n=3$, כשבודקים משוואות הקרינה ובמקרה הספציפי בו האטימות קבועה ליח' מסה (חתך פעולה מיקרוסקופי קבוע).

המשוואה ההידרוסטטית נותנת:

$$\frac{dP_{TOT}}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho$$

במשוואת המעבר קרינה נציב $P_{rad}=\frac{E}{3}$ ונקבל:

$$* \; F = -\frac{c}{3}\frac{\nabla E}{\rho\kappa_m} \longrightarrow \frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\rho\kappa_m}{c}F = -\frac{\rho\kappa_m}{c}\frac{L}{4\pi r^2}$$

נחלק את שני המשוואות ונקבל:

$$\frac{dP_{rad}}{dP_{tot}} = +\frac{\rho\kappa_m}{c}\frac{L}{4\pi r^2}\frac{r^2}{GM\rho} = \frac{L\kappa_m}{4\pi GMc}$$

אנו רואים שניתן להגדיר את עצמת ההארה של אדינגטון (שהוגדרה ע"י Milne ולא אדינגטון) ונקבל:

$$\frac{dP_{rad}}{dP_{tot}} = \frac{L}{L_{Edd}}$$

ליד השפה, יחס ה- P_{rad} ל- P_{tot} אינו ידוע (למעשה, $P_{tot}=P_{rad}$ מחוץ לכוכב כי לחץ הגז מתאפס!). נבצע אינטגרציה ונקבל:

$$P_{rad} = \frac{L}{L_{Edd}}P_{tot} + P_0$$

זניח רחוק מהשפה.

נקבל אם כן ש-

$$\beta \equiv \frac{P_{gas}}{P_{tot}} = 1 - \frac{L}{L_{Edd}}$$

(2)

נפתור את פוליטרופה $n=3$, כלומר:

$$P = K\rho^{4/3} \qquad K = \left[\left(\frac{k}{m_1}\right)^4 \frac{3}{a} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4}\right)\right]^{1/3}$$

עבור K זה קיבלנו:

$$M = M_* \left(\frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/2} \underbrace{\left(\frac{m_p}{m_1}\right)^2}_{\mu^{-2}}$$

כאשר:

$$M_* = \left(\frac{k_B}{m_p}\right)^2 \left(\frac{1}{a}\right)^{1/2} \frac{1}{G^{3/2}} = 18 M_\odot$$

נפתור כעת את שני המקרים עבור β קטן ו-β קרוב ל-1.

כוכב נשלט ע"י לחץ הגז

במקרה זה:

$$\frac{P_{gas}}{P_{rad}} \simeq 1 \longleftrightarrow (1-\beta) \ll 1 \underset{\text{מעמוד קודם}}{\Longrightarrow} \frac{L}{L_{Edd}} \ll 1$$

נקבל:

$$\frac{M}{M_*} \cong \left(\frac{L}{L_{Edd}}\right)^{1/2} \mu^{-2} \rightarrow L \simeq \left(\frac{M}{M_*}\right)^2 \mu^4 L_{Edd}$$

היות ו- $L_{Edd} \propto M$ נקבל: $L \propto M^3$

במציאות $L \tilde{\propto} M^{3.5}$ עבור $2M_\odot \lesssim M \lesssim 20M_\odot$

(ו- $L \sim M^4$ עבור מסות קטנות - אבל אין לנו קונקרטית כאן).

כוכב הנתמך ע"י לחץ קרינה

במקרה זה $\beta \ll 1 \leftrightarrow 1-\beta \simeq 1 \simeq \frac{L}{L_{Edd}} \longrightarrow L \simeq L_{Edd}$

ואז נקבל: $L \propto M^1$

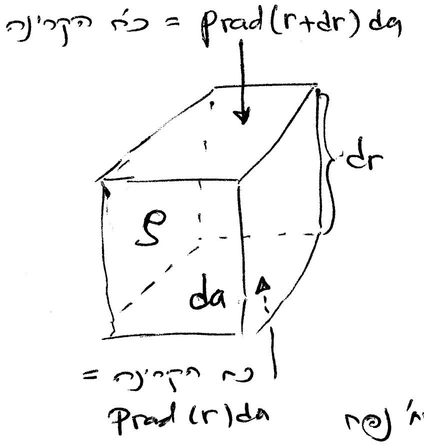
אפשר גם להסתכל על $L_{Edd} - L \equiv \Delta L$:

$$\left(\frac{M}{M_*}\right)\mu^2 \simeq \left(\frac{1}{1-L/L_{Edd}}\right)^2 \simeq \left(\frac{\Delta L}{L_{Edd}}\right)^{-2}$$

כלומר: $\frac{\Delta L}{L_{Edd}} \simeq \left(\frac{M}{M_*}\right)^{-1/2} \mu^{-1}$

ככל שהכוכב מסיבי יותר כך הוא מאיר קרוב יותר לגבול
הארה של אדינגטון אבל הוא לא עובר אותה.

מה משמעות עצמת הקרינה של אדינגטון?



נסתכל על אלמנט נפח $dv=da\cdot dr$

הכח הכולל המופעל ע"י הקרינה יהיה

$$\underbrace{f_{rad,v}\,da\,dr}_{\text{כח כולל = כח ליח' נפח כפול הנפח.}} = -P_{rad}(r+\Delta r)\,da + P_{rad}(r)\cdot da$$

ב.ג. נקבל:

$$f_{rad,v} = -\frac{P_{rad}(r+\Delta r)-P_{rad}(r)}{\Delta r} = -\frac{dP_{rad}}{dr}$$

ומכאן ממשוואת הקרינה

$$f_{rad,v} = -\frac{dP_{rad}}{dr} = +\frac{\rho\kappa_m}{c}F = \frac{\rho\kappa_m}{c}\frac{L}{4\pi r^2}$$

קודם ראינו כח הכבידה הכולל הינו!

$$f_{grav,v} = \overbrace{\rho}^{\text{כמות המסה ביח' נפח}}\frac{GM}{r^2}$$

ומה היחס?

$$\left|\frac{f_{rad,v}}{f_{grav,v}}\right| = \frac{\frac{\rho\kappa_m}{c}\frac{L}{4\pi r^2}}{\rho\frac{GM}{r^2}} = \frac{L\kappa_m}{4\pi GMc} = \frac{L}{L_{Edd}}$$

← מסקנה: כאשר L מתקרב לעצמת ההארה של אדינגטון מתקבל שכח הקרינה משתווה לכח הכבידה.

לא ניתן לעבור את עצמת ההארה הזו כי אז הכוכב לא יהיה קשור!

Limb Darkening "החשכת שוליים"

משוואת מעבר הקרינה מלמדת אותנו שההסתברות שפוטון שנפלט בנקודה מסוימת יגיע למרחק s הוא:

$$P = \exp(-k_\nu s)$$

אבל, אם האטימות k_ν תלויה במקום, נקבל:

$$P = \exp\left(-\int k_\nu s\right)$$

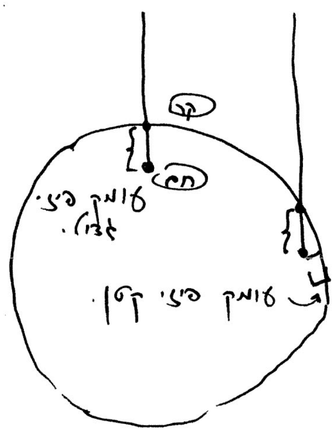
נהוג להגדיר עומק אופטי כ:

$$\tau \equiv -\int k_\nu s$$

וגבולות האינטגרציה יכולים להיות למשל $r, r\to\infty$, ואז נקבל את העומק האופטי של נקודה מה-∞.

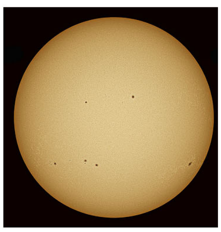
המשמעות של ההסתברות הזו שהפוטונים מגיעים ממרחקים המקיימים $\tau \lesssim 1$ וזאת מפני שעבור $\tau \gg 1$, כל הסיכוי הוא שפוטון יבלע בדרך.

אם נסתכל כעת על כוכב ונשווה שני קרניים, האחת שמגיעה אנכית והשנייה, שמגיעה בזווית גדולה יחסית לאנך, נראה שהקרן שמגיעה אנכית מגיעה מעומק רב יותר. קרן המגיעה בזווית גדולה יחסית לאנך עוברת מרחק גדול, אולם הרכיב הורטיקלי הוא קטן.



היות והקרן האנכית מגיעה מעומק רב יותר היכן שחם יותר, קרן זו תהיה בהירה יותר ועם שטף פוטונים רב יותר.

הקרן המגיעה בזווית גדולה יחסית לאנך תגיע מעומק קטן יותר, היכן שקר יותר ולכן היא תהיה פחות בהירה.

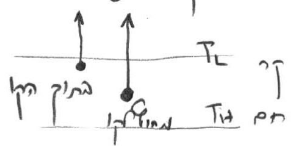


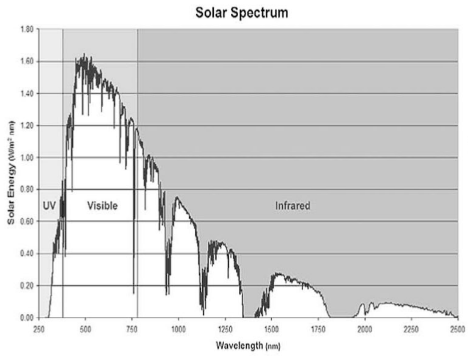
ניתן גם להבין כעת כיצד נוצרים קווי בליעה.

אם נסתכל על קו בליעה

אזי בתוך הקו, האטימות גדולה יותר ולכן בכל זווית שהן,

נקבל שעומק אופטי יחידה מתקבל גבוה יותר באטמוספירה.





הקווים כהים כי
הם מגיעים מאיזורים
כהים יותר.

אולם, לרוב הטמפ' יורדת עם הגובה, ולכן קו שמגיע

מאיזור גבוה יותר יהיה פחות בהיר ולכן נראה כמו

קו בליעה. אם יש "אינברסיה" אפשר לקבל קו

פליטה.