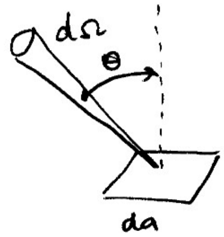
צפיפות האנרגיה בגוף שחור (ומה שווה B(T)?)



נסתכל על אלמנט שטח בטמפ' T

האלמנט פולט אנרגיה בקצב:

$\sigma T^4 da$, (או σT^4 אנרגיה

ליח' זמן ליח' שטח). מתוך ה-σT^4, כמות מסוימת תכנס לתוך $d\Omega$

(אלמנט זוית מרחבית). הכמות הזו תהיה:

$$\underbrace{I(\theta)}_{\text{אנרגיה ליח' שטח ליח' זמן ליח' זוית מרחבית}} d\Omega = \sigma T^4 \cos\theta \, d\Omega * N$$

$\cos\theta$ הוא פקטור זויתי שחייב להכנס, זאת מפני שהשטח שהאלמנט יראה בתוך $d\Omega$ יהיה ההיטל של da בכיוון θ, ולכן יקבל הפקטור $\cos\theta$. הפקטור N הוא מקדם נירמול. התנאי נירמול הוא שכל האנרגיה הנכנסת לכל האלמנטים $d\Omega$ מעל המישור הוא פשוט σT^4:

$$\int I(\theta) d\Omega = \sigma T^4 \rightarrow \int \sigma T^4 \cos\theta \, d\Omega * N = \sigma T^4$$

או:

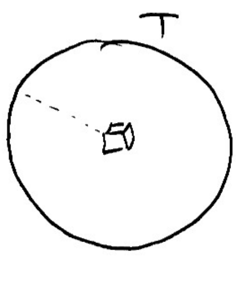
$$N^{-1} = \int \cos\theta \, d\Omega = 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi$$

כלומר:

$$I(\theta) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \cos\theta$$

עד כאן: $I(\theta)$ הוא עוצמת הקרינה בכיוון θ כלומר, אנרגיה ליח' שטח ליח' זמן ליח' זוית מרחבית.

* נסתכל על כדור בטמפ' T אחידה.



מה תהיה צפיפות האנרגיה E במרכז הכדור?

(E - אנרגיה ליח' נפח). הקשר בין E ל-I

הוא:

$$E = \frac{1}{c} \int d\Omega \cdot I$$

כדי להפיק שטף לצפיפות אנרגיה יש לחלק במהירות החלקיקים, במקרה זה c. כמו כן, יש לסכם את התרומה של השטף שמגיע מכל זוית מרחבית (לכן ה-∫)

ע.ג.ו.

$$E = \frac{1}{c}\int I\,d\Omega = \frac{4\pi}{c}\,\frac{\sigma T^4}{\pi} = \underbrace{\frac{4\sigma}{c}}_{\equiv a} T^4$$

$\theta=0$ עבור I מכל אלמנט על הכדור.

$a \equiv \frac{4\sigma}{c}$ הוא קבוע הקרינה $= 7.56\times10^{-15}\,erg\,cm^{-3}K^{-4}$ המקשר בין טמפ' לבין צפיפות

האנרגיה של פוטונים בגוף שחור.

כמה אנרגיה נבלעת בחומר במרכז הכדור?

המשוואה של המעבר קרינה היא:

$$\frac{dI}{dx} = -\underbrace{k_\nu I}_{\text{בליעה}} + B$$

ע.י. קצב הבליעה מקרן I הוא $k_\nu I$. מכל הקרניים, נקבל:

קצב בליעה ליח' נפח (אנרגיה ליח' נפח ליח' זמן)

$$A = k_\nu \int I\,d\Omega = +k_\nu \frac{4\pi\,\sigma T^4}{\pi} = 4k_\nu \sigma T^4$$

בשיווי משקל, קצב הפליטה שווה לקצב הבליעה (אחרת, האלמנט היה מתחמם או מתקרר!). לכן:

$$\int B\,d\Omega = A = 4k_\nu\sigma T^4 \rightsquigarrow B = k_\nu \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

מה שמתקבל הוא:

$$\frac{dI}{dx} = -k_\nu\left(I - \frac{\sigma T^4}{\pi}\right)$$

מה המשוואה הזו אומרת? בכל נקודה ונקודה אני פולט (לכל כיוון) אנרגיה של $k_\nu \frac{\sigma T^4}{\pi}$ (ליח' זמן ליח' שטח ליח' זווית מרחבית) לכל הכיוונים. כל פוטון נע לכיוון אליו נפלט ויש לו סיכוי $k_\nu dx$ להיבלע באלמנט באורך dx.

מה זה אומר? אם נסתכל על נקודה P, אזי השטף I בנקודה זו יהיה בעל תרומות מכל הנקודות P' שנמצאות בכיוון ההפוך של הקרן. כפי שראינו קודם, הסיכוי של פוטון לצאת מ-P' ולהגיע ל-P הוא:

$$P(x) = \frac{\exp(-k_\nu r)}{\int_0^\infty \exp(-k_\nu r)\,dr} = k_\nu \exp(-k_\nu r)$$

השטף עצמו יהיה:

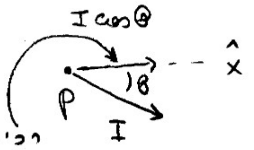
$$I = \int_0^\infty dr\, B(p') \exp(-k_\nu r)$$

ראינו שבפרק — האנרגיה היא:

$$E = \frac{1}{c} \int I \, d\Omega$$

בצורה דומה נמצא שהשטף הוא:

$$\frac{\text{אנרגיה}}{\text{שטח}\cdot\text{זמן}} - F_x = \int I \cos\theta \, d\Omega$$



רכיב של I בכיוון $\hat{x}$ שתורם ל-F_x. האינטגרל מסכם את התרומה מכל ה-I-ים.

נסתכל כעת על מערכת בה יש גרדיאנט בטמפ' ∇T בכיוון ציר $\hat{x}$. למה יהיה שווה השטף?

$$B(p') = k_\nu \frac{\sigma T_{p'}^4}{\pi} = k_\nu \frac{\sigma(T_p - r|\nabla T|\cos\theta)^4}{\pi}$$

$$\cong \frac{k_\nu \sigma T_p^4}{\pi} - \frac{4 k_\nu \sigma T_p^3 r |\nabla T| \cos\theta}{\pi} + \text{איברים בסדר גבוה יותר ב} \ (k_\nu \nabla T / T)$$

השטף יהיה:

$$F = \underbrace{\int d\Omega}_{2\pi\int_0^\pi \sin\theta d\theta} \int_0^\infty dr \left[\frac{k_\nu \sigma T_p^4}{\pi} - \frac{4 k_\nu \sigma T_p^3 r |\nabla T| \cos\theta}{\pi} \right] \exp(-k_\nu r)$$

$$= 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \, d\theta}_{=0} \int_0^\infty dr\, k_\nu \frac{\sigma T_p^4}{\pi} \exp(-k_\nu r)$$

$$- 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}_{=2/3} \int_0^\infty dr\, k_\nu \frac{4\sigma T_p^3 |\nabla T| r}{\pi} \exp(-k_\nu r)$$

$$= -\frac{16}{3} \sigma T_p^3 \frac{|\nabla T|}{k_\nu} \underbrace{\int_0^\infty (k_\nu r)(k_\nu dr) \exp(-k_\nu r)}_{=1} = -\frac{16}{3} \sigma T^3 \frac{\nabla T}{k_\nu}$$

כי $4\sigma = ac$ ו- $E = aT^4$:

$$F = -\frac{c}{3} a \frac{\nabla(T^4)}{k_\nu} = -\frac{c}{3} \frac{\nabla E}{k_\nu}$$