# אסטרופיסיקה וקוסמולוגיה - הרצאה בנושא משוואות פרידמן

ראינו שמרחבים הומוגניים שמקיימים את העקרון הקוסמולוגי מתוארים ע"י מטריקת Robertson Walker. כעת אנו צריכים את המשוואות שיתנו לנו כיצד המרחב עובר אבולוציה. משוואות אלה מתוארות ע"י משוואות איינשטיין שנראות:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

---

$R_{ij}, R$ הם הטנסור והסקלר של Ricci והם קשורים למטריקה $g_{ij}$ ע"י סימני קריסטופל והטנסור של רימן:

Christoffel Symbols:
$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left[ \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right]$$

טנסור רימן:
$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$$

ולבסוף:
$$R_{ik} = R^l_{ilk} \qquad R = g^{ik} R_{ik}$$

---

$T_{ij}$ הוא הטנסור אנרגיה - מומנטום:
$$T_{ij} = (\overset{\text{הלחץ}}{p} + \underbrace{\rho c^2}_{\text{צפיפות המסה אנרגיה}}) U_i U_j - p g_{ij}$$

אם מציבים את מטריקת RW לתוך משוואות איינשטיין, מקבלים:

מהחלק זמן-זמן:
$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + 3\frac{P}{c^2}\right) a$$

משוואות פרידמן Friedmann

מהחלק מרחב-מרחב:
$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2 = 4\pi G \left(\rho - P/c^2\right) a^2$$

אם מחברים את המשוואות יחד:
$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho a^2$$

מהחלק זמן - מרחב מקבלים $0=0$.

משוואות פרידמן הן לא בלתי תלויות אחת בשניה. למעשה
ניתן לקבל את המשוואה השניה מהראשונה אם אנו לוקחים בחשבון את ההתפשטות
האדיאבטית של היקום:

$$dU = -p\,dV$$

$$\underbrace{d(\rho c^2 a^3)}_{\text{אנרגיה של קופסה } a^3} = \underbrace{-p\,da^3}_{\text{שינוי הנפח של הקופסה.}}$$

( כי אין מגע $ds=0$
עם מאגר חום אחר... )

העובדה שמשוואות פרידמן מכילות שימור אנרגיה אינה מפתיעה היות ומשוואות
איינשטיין נבנות כך שאנרגיה, מומנטום ומסה נשמרים.
את המשוואה האחרונה ניתן לרשום:

$$d(\rho c^2 a^3) + d(p a^3) - a^3\,dp = 0$$

כך:

$$\dot{p} a^3 = \frac{d}{dt}\left[a^3(\rho c^2 + p)\right]$$

$$\dot{p} a^3 = \frac{da^3}{dt}(\rho c^2 + p) + a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2 + a^3 \dot{p}$$

$$\cancel{\dot{p} a^3} = 3a^2 \dot{a} \rho c^2 + 3a^2 \dot{a} p + a^3 \dot{\rho} c^2 + \cancel{a^3 \dot{p}}$$

או כך:

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

---

למעשה, למשוואת פרידמן הראשונה ניתן להגיע גם בדרך קלסית.
חוק גאוס אומר שמסה ניתנת נמשכת רק ע"י המסה שנמצאת בתוך רדיוס
שנקבע ע"י רדיוס המסה. חוק גאוס אמור להתקיים גם עבור מערכת שהיא
הומוגנית. בגלל שהמערכת הומוגנית ניתן לבחור ראשית היכן שאנו רוצים!


התאוצה של הנקודה ברדיוס $l$ תהיה:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{Gm(l)}{l^2} = -\frac{4\pi}{3} G\rho l \quad (*)$$

נכפיל ב- $\dot{l}$ ונקבל:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{l}^2}{2}\right) = -\frac{Gm\dot{l}}{l^2}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\dot{l}^2 = \frac{2Gm}{l} + c = \frac{8\pi}{3}G\rho l^2 + \underbrace{c}_{\text{קבוע שיחסי לאנרגיה הכוללת.}}$$

(את האינטגרציה מבצעים עם $m$ קבוע כמובן).

את $l$ ניתן לרשום כאיבר שהוא proper distance עם סקלת יקום משתנה:

$$l = d_c \frac{a}{a_0} \longrightarrow \dot{l} = d_c \frac{\dot{a}}{a_0}$$

כך ש-

$$d_c^2 \frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho d_c^2 \frac{a^2}{a_0^2} + c$$

או:

$$\dot{a}^2 + \tilde{C} = \frac{8\pi}{3} G\rho a^2$$

כשמשווים את $\tilde{C}$ למתקבל ממשוואות איינשטיין $\tilde{C}$ הוא $Kc^2$, דהיינו, האנרגיה הכוללת של "המרחב" קובעת אם יהיה סגור, שטוח או פתוח (היפרבולי)

המשוואה הראשונה (*) נותנת:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G\rho$$

המשוואה הזו אינה בדיוק המשוואה שמתקבלת ממשוואות איינשטיין אך זה מפני שה- $\rho$ האפקטיבי ביחסות הוא כולל את צפיפות המסה והלחץ:

$$\rho_{eff} = \rho + 3\frac{P}{c^2}$$

כאשר הלחץ הוא משמעותי, הצפיפות האפקטיבית גדולה יותר!

## הקבוע הקוסמולוגי $\Lambda$

איינשטיין ב- 1917 הוסיף איבר למשוואה שלו, שתראה:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

זוהי ההכללה המירבית למשוואות איינשטיין שעדיין מקיימות ש- $T_{ij}$ יחסי לטנסור שתלוי ב- $g_{ij}$, בנגזרות הראשונות שלו ולינארי בנגזרות השניות שלו וכמו כן, אינו משנה את משוואות הרצף $T^{ij}{}_{;j}=0$ (שימור מסה, מומנטום ואנרגיה). $\Lambda$ גם אינו משנה את הפיסיקה המיקרוסקופית ($\Lambda$ צריך להיות מספיק קטן כדי שלא נראה את השפעתו עד לסקלה הגודל מאוד).

הסיבה ההיסטורית שאיינשטיין הכניס את $\Lambda$ היתה כדי שניתן יהיה לקבל יקום סטטי (ללא Big-Bang ושנראה תמיד אותו הדבר). בדיעבד, הוא היה בטוח שזה טעות היות והיקום (תבל) כמתפשט ע"י הבל,,, ובדיעבד נוסף התברר לאחרונה שככל הנראה ייתכן ו- $\Lambda \neq 0$!

ניתן להתייחס ל- $\Lambda$ ע"י הגדרת $T_{ij}$ חדש:

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ij} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{ij} = -\tilde{p} g_{ij} + (\tilde{p} + \tilde{\rho} c^2) U_i U_j$$

דהיינו, ע"י הגדרת לחץ וצפיפות מסה-אנרגיה חדשים:

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \qquad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

ל- $|\Lambda|^{-1/2}$ יש מימדים של אורך. זה הגודל האופייני של היקום שמעליו $\Lambda$ חשוב.

**מודל איינשטיין:**

כדי לקבל יקום סטטי:

$$0 = \ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G\left(\tilde{\rho} + 3\frac{\tilde{p}}{c^2}\right) a$$

או:

$$\left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} + \cancel{\frac{3p}{c^2}} - \frac{3\Lambda c^2}{8\pi G}\right) = 0$$

$p/c^2 \ll \rho$ ביקום של היום

לכן ביקום סטטי צריך להתקיים:

$$\Lambda = \frac{4\pi G\rho}{c^2}$$

זהו מודל איינשטיין, שהוא סטטי אבל לא יציב! אם באיזור מסוים $\rho$ גדל, אותו איזור יתמוטט ואילו באיזורים בהם $\rho$ קטן יותר, האיזורים יתנפחו.

## מודל de Sitter (1917)

מודל זה מניח יקום ריק $p=0, \rho=0$ (למעשה קטנים ביחס ל: $\rho, \frac{p}{c^2} \ll \frac{\Lambda c^2}{4\pi G}$) ושואף $K=0$. במקרה זה:

$$\tilde{p} = -\tilde{\rho} c^2 = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

מציבים במשוואה ל- $\dot{a}^2$ ומקבלים:

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3} c^2 a^2$$

$\Lambda$ חייב להיות חיובי כדי שיהיה פתרון מסוג זה

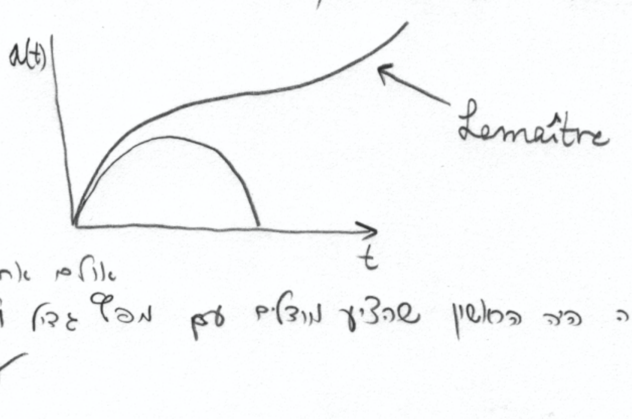
$$a = A\exp\left(\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} ct\right)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = c\left(\Lambda/3\right)^{1/2}$$

במודל דה-סיטר, חלקיקים מתרחקים זה מזה בתנועה מואצת כתוצאה מהאפקט הדוחה של $\Lambda$. עד לפני כ- 20 שנה, מודל זה היה בעל ענין "אקדמי" בלבד. אולם מתברר שהוא משחק תפקיד חשוב במודל האינפלציוני (בהמשך...) בו כתוצאה מאפקטים קוונטיים, מתקיים בתקופה מסוימת: $p=-\rho c^2$. הגדילה האקספוננציאלית יכולה לפתור את בעית הקוזליות (מדוע איזורים שונים ביקום שפעם לא היו במגע זה עם זה, נראים בדיוק אותו הדבר).

## מודל Lemaitre (1927)

במודל זה ישנם $\Lambda$ ו- $K=-1$. ניתן לראות שבמקום שתהיה התפשטות והתכווצות, ניתן לקבל:




ב- 1970 השתמשו במודל זה על מנת להסביר מדוע רואים "עודף" קוואזרים ב- $z\approx2$

אולם אח"כ התברר שזאת לא בעיה.

בכל מקרה למטרה היה הראשון שהציע מודלים עם מפץ גדול ולכן הוא נחשב לאבי ה- Big Bang

## מודלים של פרידמן:

המשוואות שיש לנו הן

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + 3P/c^2\right)a$$

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2$$

$$d(\rho a^3) = -3\frac{P}{c^2}a^2 da$$

או

כדי שנוכל "לסגור" את המשוואות, יש למצוא קשר בין $p$ לבין $\rho$ $p(\rho)$.

בדר"כ ניתן לעבוד בקירוב של "perfect fluid": $p = w\rho c^2$

---

דרך אחרת לרשום את המשוואה השניה היא בעזרת $H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$:

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho\left(\frac{a_0}{a_0}\right)^2 = H_0^2 - H_0^2\cdot\frac{\rho}{\underbrace{(3H_0^2/8\pi G)}_{\equiv\rho_c}} = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

או:

$$H_0^2\Big(1 - \underbrace{\frac{\rho_0}{\rho_c}}_{\Omega\,\equiv\,\text{density parameter}}\Big) = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

אם הצפיפות מעל הצפיפות הקריטית, היקום בהכרח עם $K=+1$. אם שווה הצפיפות, $K=0$ ואם הצפיפות קטנה מקריטית, $K=-1$.

---

נחזור למשוואת המצב:

עבור גאז קלסי:

$$p = \frac{k_B T}{m_p c^2}\rho_m c^2 = \underbrace{\frac{k_B T}{m_p c^2}}_{\ll 1}\;\frac{\rho c^2}{\underbrace{\left[1 + \frac{k_B T}{(\gamma-1)m_p c^2}\right]}_{\approx 1}}$$

לכן $w \to 0$ עבור גאז קלסי (התרומה של הלחץ לצפיפות אנרגיה-מסה היא זניחה).

עבור גאז יחסותי: $p = \frac{1}{3}\rho c^2 \longrightarrow w = 1/3$

באופן כללי: $v_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{1/2}$

ולכן $w$ אינו יכול להיות גדול מ-1 (יגרום מהירות קול $> c$)

$w<0$ אינו מתקבל עבור חומר רגיל אך ישנם מצבים בהם החומר יכול לקיים $w<0$ בתחום מסוים באופן אפקטיבי.

מהמשוואה של "נוזל אידיאלי" והתפשטות אדיאבטית מתקבל:

$$d(\rho a^3) = -3 \frac{w \rho c^2}{c^2} a^2 da$$

$$\hookrightarrow \rho a^{3(1+w)} = const = \rho_{0w} a_0^{3(1+w)}$$

עבור dust universe, בספרות נק' matter dominated universe:

$$\rho a^3 \equiv \rho_m a^3 = const. = \rho_{0m} a_0^3$$

עבור יקום הנשלט ע"י לחץ קרינה (radiation universe):

$$\rho a^3 \equiv \rho_r a^4 = const = \rho_{0r} a_0^4$$

אם נחליף את a ב- z:

$$\rho_m = \rho_{m,0} (1+z)^3$$
$$\rho_r = \rho_{0,r} (1+z)^4$$

---

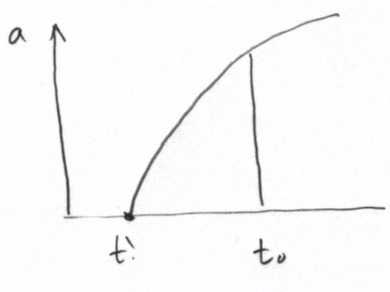
אם נגדיר $\Omega_w = \frac{\rho_{0,w}}{\rho_{0,c}}$ נקבל:

$$\left(\frac{\dot a}{a_0}\right)^2 = H_0 \left[ \Omega_w \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1-\Omega_w) \right]$$

או לחילופין:

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \left[ \Omega_w \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1-\Omega_w) \right]$$

מהמשוואה הראשונה אנו רואים שעבור $-1/3 < w$ $(<1)$ נקבל ש- $\dot a$ יותר גדול עבור a יותר קטן. מודלים אלה בכל מקרה יובילו ל- Big Bang.




בעיקרון, ישנו $a(t=t')=0$ עבור $t'$ סופי בעבר.

## מודל איינשטיין דה-סיטר Einstein de-Sitter

זהו מודל עם $\Omega_w=1$ ו- $\Lambda=0$. (במקור רק עבור $w=0$).

$$\left(\frac{\dot a}{a_0}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} = H_0^2(1+z)^{1+3w}$$

$$\hookrightarrow a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3(1+w))} \longrightarrow$$

מודל זה יתפשט לאט אך בקצב קטן עם הזמן, מדובר במודל עם אנרגיה שווה בדיוק לאנרגיה הקריטית הנחוצה כדי לעצור את ההתפשטות של היקום ב- $t\to\infty$.

או:

$$t = t_0(1+z)^{-3(1+w)/2}$$

האבולוציה של קבוע האבל:

$$H = \frac{\dot a}{a} = \frac{2}{3(1+w)t} = H_0\left(\frac{t_0}{t}\right) = H_0(1+z)^{3(1+w)/2}$$

ההאטה:

$$q = -\frac{a\ddot a}{\dot a^2} = \frac{1+3w}{2} = \text{const} = q_0$$

גיל היקום.

$$t_{0,w} \equiv t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}$$

האבולוציה של הצפיפות:

$$\rho = \rho_{0,w}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} = \frac{1}{6(1+w)^2\pi G t^2}$$

$$\left(\rho_{0,w}t_0^2 = \rho_{0c}\,t_{0c,w}^2 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\left[\frac{2}{3(1+w)H_0}\right]^2 = \frac{1}{6(1+w)^2\pi G}\right.$$

כאשר ע"י שימוש ב- ..)

| dust | radiation |
|---|---|
| $a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$ | $a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$ |
| $t = t_0(1+z)^{-3/2}$ | $t = t_0(1+z)^{-2}$ |
| $H = \frac{2}{3t} = H_0(1+z)^{3/2}$ | $H = \frac{1}{2t} = H_0(1+z)^2$ |
| $q_0 = 1/2$ | $q_0 = 1$ |
| $t_{0,c,m} \equiv t_0 = \frac{2}{3H_0}$ | $t_{0,c,r} \equiv t_0 = \frac{1}{2H_0}$ |
| $\rho_m = \frac{1}{6\pi G t^2}$ | $\rho_r = \frac{3}{32\pi G t^2}$ |

# אסטרופיסיקה וקוסמולוגיה - מודלים של פרידמן (המשך)

נסתכל כעת על תכונות כלליות של מודלים עם עקמומיות. דהיינו $\Omega_w \neq 1$ $w$ - קבוע כלשהו.

במשוואה:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0\left[\Omega_w\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1-\Omega_w)\right]$$

האיבר $(1-\Omega_w)$ הוא זניח ביחס לשאר כאשר:

$$\frac{a_0}{a} = 1+z \gg \left|\Omega_w^{-1}-1\right|^{1/(1+3w)} \equiv \frac{a_0}{a^*} = 1+z^*$$

לכן, באינטרוול $0 < a \ll a^*$ ניתן לתאר את המשוואה ע"י:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 \simeq H_0^2\,\Omega_w\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} = H_0^2\,\Omega_w\,(1+z)^{1+3w}$$

וגם:

$$H^2 \simeq H_0^2\,\Omega_w\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+3w)} = H_0^2\,\Omega_w\,(1+z)^{3(1+w)}$$

משוואות אלו זהות בדיוק למקרה $\Omega_w=1$ כל עוד מחליפים: $H_0$ ב- $H_0\Omega_w^{1/2}$.

ספציפית, יש לנו:

$$H \simeq H_0\,\Omega_w^{1/2}\,(1+z)^{3(1+w)/2}$$

ו-

$$t \simeq t_{0c,w}\,\Omega_w^{-1/2}\,(1+z)^{-3(1+w)/2}$$

ושאר המשוואות עבור $\rho(t)$ ו- $q(t)$ אינן משתנות הרבה והן אינן תלויות מפורשות ב- $H_0$.

## מודלים של "אבק"

כאשר לחץ הגז זניח נקבל $w=0$ וישנם פתרונות אנליטיים גם עבור $\Omega\neq1$.

נקבל כעת:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left(\Omega\frac{a_0}{a} + 1 - \Omega\right)$$

## מודלים "פתוחים":

פתרון המשוואה הנ"ל ניתן בצורה פרמטרית:

$$a(\psi) = a_0\,\frac{\Omega}{2(1-\Omega)}\,(\cosh\psi - 1)$$

$$t(\psi) = \frac{1}{2H_0}\,\frac{\Omega}{(1-\Omega)^{3/2}}\,(\sinh\psi - \psi)$$

ניתן לקבל:

(גיל היקום):

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}\,\frac{\Omega}{(1-\Omega)^{3/2}}\left[\frac{2}{\Omega}(1-\Omega)^{1/2} - \cosh^{-1}\left(\frac{2}{\Omega}-1\right)\right] > \frac{2}{3H_0}$$

$$\simeq (1+\Omega\ln\Omega)\frac{1}{H_0} \text{ for } \Omega \ll 1$$

מודלים סגורים:

במקרה ו- ורב, למשוואה עבו $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ ישנו הפתרון הפרמטרי:

$$a(\theta) = a_0 \frac{\Omega}{2(\Omega-1)} (1-\cos\theta)$$

$$t(\theta) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}} (\theta - \sin\theta)$$

$a(t)$ גדל בזמן עבור $0 \le \theta \le \theta_m = \pi$, ה- $a$ המקסימלי הוא:

$$a_m = a(\theta_m) = a_0 \frac{\Omega}{\Omega-1}$$

$$t_m = t(\theta_m) = \frac{\pi}{2H_0} \frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}}$$

כמו כן:

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega}{(\Omega-1)^{3/2}} \left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{\Omega}-1\right) - \frac{2}{\Omega}(\Omega-1)^{1/2}\right] < \frac{2}{3H_0}$$