האוניברסיטה העברית בירושלים
The Hebrew University of Jerusalem

פרופ' ניר שביב

ניר שביב

אסטרופיסיקה וקוסמולוגיה 77501
מבחן מועד א' – חורף תשע"ד

- המבחן הוא ללא כל חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
  - דפי הנוסחאות המצורפים עם הבחינה
  - מחשבון

- משך המבחן שעתיים וחצי.

- בבחינה שני חלקים. בחלק הראשון יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות ואילו בחלק השני יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. **בטבלה למטה, יש להקיף את מספרי השאלות שברצונכם שיבדקו.**

- את התשובות, כולל הדרך, יש לכתוב בטופס הבחינה. רצוי להעזר במחברת משבצות כדפי טיוטא. בסוף הבחינה יש להגיש את הטופס וניתן להגיש את המחברת. תוכלו למצוא עותק של טופס הבחינה באתר הקורס.

- שימו לב שסכום הניקוד הוא 99. עד שתי נקודות נוספות הן בעבור סדר. (לכן רצוי להשתמש בטיוטא!)

ב ה צ ל ח ה !

הקיפו את שאלות לבדיקה:	1	2	3	4	5	6	7	סדר	סה"כ
לשימוש הבודק:									

1. (15 נק') הסבירו (אין צורך לחשב) מהו **השיא של גמוב** ומה קובע את מרכזו.

הסבר: השיא של גמוב הוא האנרגיה (של מערכת המסה המצומצמת) עבורה הסיכוי למצוא שני חלקיקים עוברים אינטרקציה גרעינית הוא המקסימלי.

האנרגיה נקבעת מהמכפלת הסיכוי, שגדל עם האנרגיה, לבצע חדירת הפוטנציאל, לסיכוי, שקטן עם האנרגיה, למצוא חלקיקים עם אנרגיה גבוהה (פילוג בולצמן).

2. (15 נק') הסבירו מדוע כוכבים בעלי מסה **גבוהה** על הסדרה הראשית הם קונבקטיביים בליבתם.

הסבר: אם נבחן את קריטריון שוורצשילד לקונבקציה (המבוטא בעזרת הגדלים בתוך הכוכב), נראה שיש כמה תרחישים בהם הוא יתקיים:

$$\frac{3}{16\pi}\frac{\kappa_m \rho L(r)}{acT^3} > \frac{G m(r) \mu m_p}{k}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$

בפרט, הוא יתקיים עבור $\frac{L(r)}{m(r)}$ גדול. במקרה של כוכבים מסיביים יחס זה נהיה גדול כי הבעירה הגרעינית היא בעזרת ה- CNO, הרגישה מאוד לטמפ' ($\epsilon \propto T^P$, P מאוד גדול), לכן, הבעירה תהיה ממורכזת במרכז הגרעין עם מעט מסה, כך ש- L/m גדול.

3. (15 נק') רדיוס **צדק** הוא 70000 ק"מ והוא סובב סביב השמש במרחק של 5.2 יחידות אסטרונומיות. חשבו מה היתה **המגניטודה הבולומטרית הנראית** של צדק אילו השמש הייתה בעלת אותו הרדיוס כמו רדיוסה היום, אך הטמפ' בשפה הייתה פי שתיים יותר גבוהה.

עוצמת ההארה של השמש "החדשה" תהיה:

$$\overset{\text{NewSun}}{L_{NS}} = \underbrace{\left(\frac{T_{NS}}{T_\odot}\right)^4 L_\odot}_{\text{מסטפן בולצמן}} = 16 L_\odot$$

השטף שיגיע למרחק של צדק $d_J \sim 5AU$ הוא:

$$F_J = \frac{L_{NS}}{4\pi d_J^2}$$

עוצמת ההארה הכוללת של צדק תהיה:

$$L_J = \underbrace{a}_{\text{אלבדו}} \overset{\text{שטח חתך}}{A} F_J \simeq \frac{a\pi R_J^2 \cdot L_{NS}}{4\pi d_J^2} \longleftarrow A \simeq \pi R_J^2$$

עוצמת הארה זו מתפזרת על הכדור הצוויח מסביב לצדק, אולם לא בצורה אחידה (היא תהיה תלויה בפונקציה $p(\theta)$.) השטף בכדוה"א:

$$F_\oplus = \frac{L_J\, p(\theta)}{4\pi d_J^2}$$

(נניח שכדוה"א במרחק d_J מצדק).

$$= \frac{\pi a R_J^2\, 16\, p(\theta) L_\odot}{4\pi\ 4\pi\ d_J^4} = \frac{a\, p(\theta) R_J^2 L_\odot}{\pi d_J^4}$$

נחשב מגניטודה עבור $a=0.5$ ו- $p(\theta)=1$ ונקבל:

$$m_J = -2.5 \log_{10} \frac{F_\oplus}{\underbrace{F_{ref}}_{\text{Vega}}} = -2.5 \log_{10} \frac{0.5 \cdot 1 \cdot (7\times10^9 cm)^2\, 4\times10^{33} erg/sec}{\pi\, (5.2 \times 1.5\times10^{13} cm)^4\, 2.5\times10^{-5} erg/cm^2 sec}$$

$$= -3.8$$

4. (15 נק') נתונים **מקורות המאירים בעצמת בולומטרית זהה** (דהיינו, אנרגיה ליח' זמן זהה) **ובצפיפות אחידה ליח' מרחק co-moving**. חשבו כמה מקורות יש עד הסחה לאדום z נתונה. מצאו תשובה המדויקת עד סדר שני (דהיינו סדר מוביל + אחד נוסף).

תשובה: היות ומדובר בנפח co-moving, הוא יחושב עם a_0 ולא a.

אלמנט נפח co-mov בקליפה dr יהיה אם כן:

$$dV = a_0 \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \cdot 4\pi r^2 \leftarrow ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega\right)$$

נתון כי מספר המקורות ליחידת אלמנט נפח co-m. קבוע ולכן מספר המקורות באלמנט נפח הוא:

$$dN = n \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

צפיפות המקורות

נבצע אינטגרציה ונשמור איברים עד סדר שני ב-r (או z):

$$N(<r) = \int_0^r \frac{4\pi n r^2 dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \frac{4\pi}{3} n r^3 \left(1 + O(r^2)\right)$$

כעת יש קשר בין r ל-z, שוב, עד סדר שני, נשתמש בדף נוסחאות

$$r = \frac{c}{a_0 H_0}\left(z - \frac{1}{2}(1+q_0)^2 + O(z^3)\right)$$

$$r^3 = \frac{c^3}{a_0^3 H_0^3}\left(z^3 - \frac{3}{2}(1+q_0) z^4 + O(z^5)\right)$$

ולכן:

$$N(<z) = \frac{4\pi}{3} n \frac{c^3}{a_0^3 H_0^3}\left(z^3 - \frac{3}{2}(1+q_0) z^4 + O(z^5)\right)$$

5. (27 נק') נסתכל על **מודל מקורב לכוכבים הומוגניים הדומים לשמש** על הסדרה הראשית – דהיינו נניח כוכבים השורפים מימן בעזרת ראקציות ה-PP, ושהאטימות (ליחידת מסה) אחידה בכוכב ואינה תלויה בטמפ', אך כן תלויה לינארית בצפיפות ובכמות המתכות. כמו כן, נניח כי הלחץ הכולל נשלט ע"י לחץ הגז. חישבו בקרוב באיזה פקטור תשתנה הטמפ' האפקטיבית של הכוכב אם כמות "המתכות" Z תגדל בפקטור 2.

תשובה: אם נרשום את משוואות המבנה של הכוכב בעזרת m ונפריד ואח"כ נחלק עם המימדים ונחלק חסר מימדים (למשל $P = P_* f_p(m)$) נקבל משוואות לגדלים האופייניים המכילים את המימדים:

$$\underbrace{\frac{R_*}{M} = \frac{1}{R_*^2 \rho_*}}_{\text{ממשוואת הרציפות}} \qquad \underbrace{\frac{P_*}{M} = \frac{GM}{R_*^4}}_{\text{מהמשוואה ההידרוסטטית}} \qquad \underbrace{L_* = M\tilde{\epsilon}\rho_*^2 T_*^p}_{\text{יצור אנרגיה גרעיני}}$$

כמו כן נתון שהכוכב נשלט לחץ גז:

$$P_* = \frac{\rho_* kT}{\mu m_p}$$

וכן יש לנו את משוואת מעבר הקרינה שנותנת

$$L_* = \frac{acT_*^4 R_*^4}{M\kappa_m}$$

כעת נשנה את Z. נתון ש-κ_m יחסי ל-Z ול-ρ, אולם היות והריאקציות הן של pp הן לא תהיינה תלויות ב-Z. כמו כן, μ נשלט ע"י X ו-Y ולכן שינוי ב-Z (ששווה ל-0.02 עבור השמש) לא יגרום לשינוי גדול ב-μ.

נשווה את L ממעבר קרינה ל-L מריאקציות גרעיניות:

$$\frac{acT_*^4 R_*^4}{M \underbrace{\tilde{K}_0 Z \rho_*}_{\text{יחסי ל-Z ו-}\rho}} = M\tilde{\epsilon}\rho_*^2 T^p \longrightarrow T_*^{4-p} R_*^4 \propto Z\rho_*^3$$

ממשוואת הרציפות $\rho_* = \frac{M}{R_*^3}$ ולכן: קבוע

$$T_*^{4-p} R_*^4 \propto \frac{ZM^3}{R_*^9} \longrightarrow T_*^{4-p} R_*^{13} \propto Z \qquad (*)$$

מהמשוואה ההידרוסטטית

ידוע

$$P_* \propto \frac{GM^2}{R_*^4}$$

ומגז אידיאלי קלסי:

$$P_* \propto \frac{1}{R_*^4} \propto \rho_* T$$

נציב את משוואת הרציפות $\rho_* \propto \frac{1}{R_*^3}$ ונקבל:

$$R_*^{-4} \propto R_*^{-3} T_* \longrightarrow T_* \propto R_*^{-1}$$

נציב במשוואה (*) ונקבל:

$$R_*^{p-4} R_*^{13} \propto Z$$

$$\hookrightarrow R_* \propto Z^{\frac{1}{p+9}}$$

המעריך תשע.

$$L \propto R^2 T_{eff}^4$$

השטף האפקטיבי יהיה: , מייצור אנרגיה גרעינית:

$$\hookrightarrow T_{eff}^4 \propto \frac{L_*}{R_*^2} \propto \frac{\rho_*^2 T_*^p}{R_*^2} \propto \frac{T_*^p}{R_*^8} \propto R_*^{-(p+8)}$$

נקבל:

$$T_{eff} \propto Z^{-\frac{1}{4}\frac{p+8}{p+9}} = Z^{-3/13}$$

עבור $p=4$ שמתאר pp.

6. (27 נק') אם היינו חיים **בעולם עם d מימדים מרחביים,** מה היה המקדם הפוליטרופי γ שמתחתיו כוכבים היו לא יציבים וקורסים?

תשובה: בעולם d מימדי, חוק גאוס יתן שחוק הכבידה יתנהג כמו:

$$F_g \sim \frac{1}{r^{d-1}}$$

(למשל, מהו השדה החשמלי של משטח או של תיל?).

המשוואה ההידרוסטטית תהיה:

$$\frac{dP}{dr} \propto \frac{M\rho}{r^{d-1}}$$

$$P_{hyd.} \propto \frac{M\rho R}{R^{d-1}} \propto \frac{M^2 R}{R^d R^{d-1}} = \frac{M^2}{R^{2d-2}}$$

(הצפיפות בעולם d מימדי תהיה: $\rho \sim \frac{M}{R^d}$)

אם נכווץ את הכוכב, הלחץ בתהליך הפוליטרופי יהיה $P_{pol} \propto \rho^{\gamma}$

אולם כדי למנוע קריסה, הלחץ צריך לגדול יותר מהלחץ ההידרוסטטי הנדרש

$$P_{hyd} < P_{pol}$$

ולכן, כדי <u>לקבל</u> קריסה

$$2d-1 < \gamma d$$

$$\gamma < \frac{2d-2}{d} = 2 - \frac{2}{d}$$

בדיקה, עבור $d=3$ נקבל: $\gamma_3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, כמו שצריך.

7. (27 נק') נבחן **יקום שטוח** $(k=0)$ המכיל **רק רכיב של קבוע קוסמולוגי** (ללא חומר וללא קרינה), המקיים שצפיפות האנרגיה היא קבועה $\epsilon_\Lambda=const$ (במרחב ובזמן!).

א. הראו שהיקום יקיים $a(t)=a_0\exp(H_0(t-t_0))$ תחת תנאים אלו.

ב. מהו גיל היקום (במונחים של H_0, t_0) בהסחה לאדום $z=1$?

ג. מהו המרחק co-moving בין שני גופים שלצופה היום נראים מופרדים אחד מהשני בזווית $d\Omega=0.01\,rad$ ושפלטו את אורם ב- $z=1$?

ד. נניח פוטון נפלט היום $(t=0)$. מהו המרחק co-moving שהוא יעבור עד לזמן $t_f>t_0$?

ה. האם ליקום היה מפץ גדול? (נמקו!)

תשובה: א. יקום שטוח וריק מחומר יקיים:

$$\dot{a}^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\rho a^2}_{\text{אין חומר }=0} - \underbrace{kc^2}_{\text{שטוח }=0} + \frac{\Lambda c^2}{3}a^2$$

לכן:

$$\dot{a} = \pm\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}$$

הפתרון של המד"ר המקיים התפשטות וכן ש- $a(t_0)=a_0$ הינו:

$$a(t)=a_0\exp\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}}_{H_0}(t-t_0)\Big)$$

ב. אם $z=1$ אזי $\frac{a_0}{a(t)}=1+z=2$ ולכן:

$$\frac{a_0}{2}=a_0\exp(H_0(t-t_0))$$

$$\hookrightarrow H_0(t-t_0)=-\ln 2 \rightarrow t=t_0-\frac{\ln 2}{H_0}$$

ג. נתבונן על אלמנט אורך:

$$ds^2=(c\,dt)^2-a(t)^2\Big[\underbrace{dr^2}_{\text{שטוח!}}-r^2d\Omega^2\Big]$$

היות והזווית $\Delta\theta$ לא משתנה עם הזמן, המרחק Co-moving שמחושב

לכן ע"י a_0 יהיה נתון ע"י:

$$d=\int_{\theta=0}^{\Delta\theta}\underbrace{a_0 r\,d\theta}_{\text{אלמנט אורך ניצב } ds} = a_0 r\Delta\theta$$

המשך תשובה לשאלה מס' 7

שניתן יש למצוא מהו ה-r שבו היה על הגופים לפלוט את האור כדי שהוא יגיע אלינו היום.

אור מקיים: $ds=0$ ולכן:

$$c\,dt = a(t)\,dr$$

$$\int_{t_i}^{t_0}\frac{c}{a(t)} = \int_0^r dr \xrightarrow{} \int_{t_i}^{t_0}\frac{c}{a_0}\exp(-H_0(t-t_0))\,dt = \int_0^r dr$$

הגדרה של $a(t)$

אחרי אינטגרציה נקבל:

$$\frac{c}{a_0H_0}\underbrace{\left(1-\exp(H_0(t_i-t_0))\right)}_{Z=1 \text{ ב- } =1/2} = r$$

ולכן:

$$r=\frac{c}{2a_0H_0}$$

כלומר:

$$d = a_0 r\Delta\theta = \frac{\cancel{a_0}c}{2\cancel{a_0}H_0}\overset{0.01\,rad}{\Delta\theta} = 0.005\frac{c}{H_0}$$

3. המרחק co-moving הוא ra_0, את r חישבנו ב-ב.

$$d_{co\text{-}moving} = ra_0 = a_0\frac{c}{a_0H_0}\left(\exp(H_0(t_f-t_0))-1\right)$$

למשל, עבור $H_0(t_f-t_0)\ll1$ נקבל

$$d_{co\text{-}moving}\sim\frac{cH_0}{H_0}(t_f-t_0)\simeq\underbrace{c\Delta t}_{\text{כמו שצריך!}}$$

ה. פורמלית, אין קיים זה מפץ גדול כי אין אף רגע עבורו $a(t)=0$.