The Hebrew University of Jerusalem האוניברסיטה העברית בירושלים

פרופ' ניר שביב

שיטות שיערוך בפיסיקה 77412

מבחן מועד א', סמסטר אביב תשס"ט

- המבחן הוא ללא כל חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
  - 2 דפי נוסחאות (4 עמודי A4)
  - מחשבון
- יש לנמק את התשובות. תשובה לא מנומקת לא תתקבל.
- משך המבחן שעתיים.
- בבחינה אוסף שאלות שסכום ערכן עולה על 100 נקודות.
  - יש לסמן v במשבצת שליד כל שאלה אם ברצונכם שהיא תבדק. שימו לב שישנן שאלות שלא חובה לענות על כל הסעיפים.
  - אם סך ניקוד השאלות לבדיקה מקיים $n > 100$, הציון הסופי יהיה נתון ע"י:

$$\left(\frac{m}{n}\times\left[100-\frac{n-100}{2}\right]+\frac{n-100}{2}\right)+\frac{n-100}{10}$$

כאשר m הוא סך הנקודות שקיבלתם. בכך, אם עניתם מעל ל-100 נקודות אתם מקנים לכם פקטור.

- את התשובות, כולל הדרך, יש לכתוב בטופס הבחינה. רצוי להעזר במחברת הירוקה כדפי טיוטא. בסוף הבחינה, יש להגיש את הטופס ואת המחברת. (לפעמים מקבלים ניקוד מהטיוטא).
- כמו בחיים האמיתיים, בשאלות יתכנו נתונים שאינם דרושים לפתרון הבעיה, ולהיפך...

בהצלחה!

לשימוש הבודק:

1	2	א 3	ב 3	א 4	ב 4	א 5	ב 5	ג 5	א 6	ב 6	א 7	ב 7	א 8	ב 8	ג 8	סה"כ	מתוך	סופי

1. ☐ 10 נק'. העריכו כמה בודקי כרטיסים עובדים בחברת אגד בירושלים.

תשובה:

נפרק לגורמים:

- נניח כי אוכלוסיית ירושלים 10^6. חצי מהאוכלוסיה משתמשת באוטובוסים.
- מי שנוסע קבוע פוגש פקח פעם בשנה בערך (הערכה של מלפני מספר שנים בהם הייתי נוסע קבוע).
- פקח יכול לראות כ-20 אנשים על אוטובוס כל כ-20 דקות. סה"כ 480 ביום או 96,000 לשנה.
- כדי לפגוש 5×10^5 אנשים בשנה, צריך כ-5 פקחים.

ע"פ נהג שנשאל ע"י אחד מהסטודנטים, יש 10 פקחים בירושלים.

---

2. ☐ 12 נק'. חלקיק קוונטי לא יחסותי נמצא בתוך בור פוטנציאל מהצורה $U(x) = \alpha|x|^3$.
העריכו למה שווה התוחלת $\langle x^2\rangle$ ברמת היסוד.

תשובה:

רמת היסוד: $\Delta x \Delta p \sim \hbar$

החלקיק לא יחסותי: $E \simeq p^2/2m$

$$\Delta p \sim \sqrt{mE} \sim \sqrt{m\alpha\Delta x^3}$$

נציב בעקרון אי הוודאות: $\Delta x\sqrt{m\alpha\Delta x^3} \sim \hbar$

$$\Delta x \sim \left(\frac{\hbar}{(\alpha m)^{1/2}}\right)^{2/5}$$

ולכן נצפה שהתוחלת תהיה: $\langle\Delta x^2\rangle \sim \dfrac{\hbar^{4/5}}{(\alpha m)^{2/5}}$

3. נעריך את מהירות ההתפשטות של החור בבועת סבון מתפוצצת.

(א) ☐ 12 נק'. מתוך העובדה שבועה בקוטר של כ-5 ס"מ מתעוותת משמעותית מכובד משקלה (כשהיא על משטח) או מכך שטיפת מים בקוטר של 5 מ"מ נצמדת אליה, העריכו מהו מתח הפנים γ של מי הסבון ומהי הצפיפות המשטחית בבועה.

(ב) ☐ 12 נק'. העריכו תוך כמה זמן יקח לבועה כזו להתפוצץ.

תשובה:

א. - אם הבועה מתעוותת משמעותית ממשקלה או ממשקל טיפה בקוטר 5 מ"מ אז משקל הבועה כמשקל הטיפה.

$$m = \frac{4\pi}{3} \underbrace{r^3}_{\text{טיפה}} \cdot \rho \simeq 0.06\,gr$$

הצפיפות המשטחית:

$$\Sigma \sim \frac{m}{4\pi \underbrace{R^2}_{\text{בועה}}} \simeq \frac{0.06\,gr}{4\pi \cdot (2.5\,cm)^2} \simeq 8\times10^{-4}\,gr/cm^2$$

- הכח ממתח הפנים: $F_s \sim \gamma R$

- הכח מהכובד: $F_g \sim mg$

שווי ערך

$$\gamma \sim \frac{mg}{R}$$

$$\gamma \sim \frac{0.06\,gr \cdot 1000\,cm/sec^2}{2.5\,cm} \sim 24\,\underbrace{gr/sec^2}_{dyne/cm}$$

ב - הזמן יהיה תלוי ב-: $T : \Sigma, R, \gamma$

(עקרונית, המסה m בעצמה התקבלה מ- R ו- Σ ולכן לא גודל בלתי תלוי!).

T : sec

Σ : gr/cm^2

R : cm

γ : gr/sec^2

$$[\Sigma/\gamma] = sec^2/cm^2$$

$$\left[\frac{\Sigma R^2}{\gamma}\right] = sec^2 \Rightarrow T \sim \sqrt{\frac{\Sigma}{\gamma}}\, R$$

$$\sim \sqrt{\frac{8\times10^{-4}\,gr/cm^2}{24\,gr/sec^2}} \cdot 2.5\,cm \sim 14\times10^{-3}\,sec$$

$\Leftarrow$ מסדר גודל של 15 מילישניות.

---

4. גלי אלפבן (Alfvén waves) הם גלים בהם יונים בלפזמה מתנדדים בשדה מגנטי.

(א) ☐ 5 נק'. מהו הלחץ האופייני בשדה מגנטי B נתון?

(ב) ☐ 20 נק'. מה יהיה יחס הדיספרסיה לגלי אלפבן? (דיינו, מהו הקשר $\omega(k)$ בגלים?)

תשובה:

א. ב c.g.s ; צפיפות האנרגיה היא: $B^2/4\pi$

ב. צפיפות אנרגיה קינטית ~ צפיפות אנרגיה מגנטית

$$\frac{1}{2} n m v^2 \sim B^2 \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 \longleftrightarrow$$

חייב להיות ריבועי כי סדר לינארי יתבטל לאפס על אזורים שונים בגל.

$$\frac{1}{2} n m \underbrace{v_\omega^2}_{\text{מהירות הגל}} \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 \sim B^2 \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2$$

$$v_\omega^2 \sim \frac{B^2}{n m_1}$$

ניתן להגיע למהירות זו ע"י שיקולי מימדים.

יחס הדיספרסיה:

$$\omega^2(k) \sim \frac{B^2}{n m_1} k^2$$

---

5. שכבת מים בטמפ' של אפס מעלות נמצאת במגע עם אוויר בטמפ' $T < 0°C$, כך שנוצרת שכבת קרח.

(א) ☐ 4 נק'. הסבירו מדוע קיבול החום של המים אינו חשוב לבעית יצירת הקרח? (למעשה, הוא נהייה דומיננטי רק בטמפ' של מינוס 160 מעלות!).

(ב) ☐ 6 נק'. ε הוא החום הכמוס להמסת קרח ואילו κ הוא מקדם הולכת החום בקרח. מדוע הזמן שלוקח לשכבה לקפוא לעובי מסויים תלוי רק ביחס ε/κ ולא בגדלים הללו בנפרד?

(ג) ☐ 12 נק'. לוקח כ-4 ימים בטמפ' ממוצעת של מינוס 2 מעלות כדי ליצור שכבת קרח של 10 ס"מ באגם (המאפשר הליכה בטוחה). איזו טמפ' ממוצעת דרושה על-מנת ליצור שיכבת קרח של 1.7 מטר במשך 150 יום? (זהו העובי האופייני המקסימלי של קרח חד-שנתי בים הארקטי).

לנוחיותכם נתון: $\rho_{\text{ice}} = 920kg/m^3$, $\varepsilon = 3.3 \times 10^5 J/kg$, $c = 2.1 \times 10^3 J/(kg\ K)$, $\kappa = 2.3J/(m\ s\ K)$.

תשובה:

א. כדי לצור את שכבת הקרח, יש לקרר ויש להקפיא. שינוי הטמפ' דורש $C_p\Delta T$ ואילו הקפאה דורשת ε (פר יחידת מסה), היות ו- $\varepsilon >> C_p$ החום הכמוס חשוב הרבה יותר.

ב. שטף החום שיוצא מהקרח הוא $F = -K\nabla T$, אולם מה שמעניין אותנו זה כמה קרח יכול לקפוא, ז"א. מה שמעניין אותנו זו כמות החום ביח' של החום הכמוס! כלומר: K/ε.

ג. יש לנו שכבה בעובי d, הפרש טמפ' ΔT, זמן τ, מקדם הולכה ביח' של החום הכמוס K/ε ו- ρ. סה"כ 5 גדלים ו- 4 יחידות:

d: cm

τ: sec

ΔT: °K

$$K/\varepsilon : \frac{\text{erg}\cdot\overbrace{\text{cm}}^{\text{לקבל } \nabla}}{\underbrace{\text{cm}^2\cdot\text{sec}}_{\text{יח' שטף חום}}\cdot\underbrace{{}^\circ\text{K}}_{\text{לקבל } T}} \cdot \frac{\overbrace{\text{gr}}^{1/\varepsilon}}{\text{erg}} = \frac{\text{gr}}{\text{cm}\cdot\text{sec}\cdot\text{K}} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{K}{\varepsilon\rho}\right] = \frac{\text{gr}}{\text{cm}\cdot\text{sec}\cdot\text{K}} \cdot \frac{\text{cm}^3}{\text{gr}} = \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}\cdot\text{K}}$$

או:

$$\left[\frac{K\cdot\Delta T\cdot\tau}{d^2\cdot\varepsilon\cdot\rho}\right] = 1$$

ולכן:

$$\tau \sim \frac{d^2\varepsilon\rho}{K\Delta T}.$$

אם נשווה שתי שכבות עם זמני הקפאה שונים, עוביים שונים ו- ΔT שונים, נקבל:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)^{-1} \Rightarrow \Delta T_2 = \Delta T_1\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = 2^0\left(\frac{170\text{cm}}{10\text{ cm}}\right)^2\cdot\left(\frac{4\text{day}}{150\text{day}}\right) = 15^0$$

ג.2. צריך טמפ' ממוצעת של כ- -15^0 כדי להקפיא את ה-1.7 מטר קרח בחמישה חודשים.

---

6. התפרקות חשמלית משחררת יונים חיוביים ושליליים לאורך קו, בצפיפות אורכית λ ליח' אורך. נניח כי מקדם הדיפוזיה D זהה עבור שני סוגי היונים (האלקטרונים נתפסים מהר בידי אטומים כך ששני סוגי היונים כבדים). משוואת הדיפוזיה / ריקומבינציה עבור הצפיפות המספרית של היונים הינה:

$$\frac{\partial n}{dt} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \alpha n^2$$

כאשר α הינו מקדם הריקומבינציה.

(א) ☐ 10 נק'. מצאו צפיפות קריטית λ_{crit} שמאפיינית את הבעיה.

(ב) ☐ 5 נק'. כיצד יתנהגו היונים אחרי שיחרורם עבור $\lambda > \lambda_{crit}$ ועבור $\lambda < \lambda_{crit}$?

תשובה:

א. אנו רוצים לקשר בין D (cm^2/sec), α (cm^3/sec) ו- λ_{crit} ($1/cm$). סה"כ שלושה גדלים ושתי יחידות $\Rightarrow$ יש חסר מימדים אחד.

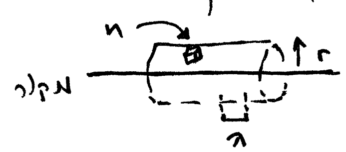
שימו לב ש- n אינו מאפיין את המשוואה (כפי שהצפיפות ההתחלתית אינה חשובה כדי לקבל זמן דיפוזיה אופייני על סקלת מרחק x).

$$[D/\alpha] = \frac{cm^2}{sec}\cdot\frac{sec}{cm^3} = \frac{1}{cm}$$

$$\left[\frac{D}{\alpha\lambda}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_{crit} \sim D/\alpha}$$

ב. באופן אינטואיטיבי, ניתן לראות שאם λ גדול, אזי איבר הריקומבינציה ינצח ואילו אם λ קטן, אזי איבר הדיפוזיה ינצח. כלומר, אם מתחילים עם λ גדול, נקבל ריקומבינציה עד ש- $\lambda \sim \lambda_{crit}$ ואז תהיה דיפוזיה של מה שנשאר.

ניתן לראות זאת אם מסתכלים על המשוואה. אם יש לנו צפיפות λ, והזמן הגיע עד מרחק r מהמקור אזי: $n \sim \lambda/r^2$



האיבר הראשון מצד שמאל יהיה:

$$\sim D\frac{n}{r^2} \sim D\frac{\lambda}{r^4}$$

האיבר השני יהיה:

$$\sim \alpha n^2 \sim D\frac{\lambda}{r^4}$$

כלומר, אם $\lambda > \lambda_{crit}$ האיבר השני (ריקומבינציה) מנצח ואילו אם $\lambda < \lambda_{crit}$, האיבר של הדיפוזיה מנצח.

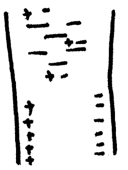
---

7. גבישים פיזואלקטריים הם גבישים שאם מפעילים עליהם מאמץ, אזי נוצר הפרש מתחים בין צידי הגביש (קוורץ הוא דוגמא קלסית). מקור תופאה זו הוא המבנה הלא סימטרי של הגביש (תחת שיקוף). אמנם בשיווי משקל אין הסחה ממוצעת בין המטען החיובי והשלילי, אולם אם מעוותים את הגביש, נוצר קיטוב ממוצע האחראי להפרש המתחים שנוצר בין צידי הגביש.

(א) ☐ 15 נק'. העריכו את המתח V שיכול להווצר בגביש לא סימטרי טיפוסי, אם מופעל על הגביש כוח F.

(ב) ☐ 5 נק'. אם מוחצים גביש קוורץ באצבעות, לאיזה מתח אופייני ניתן להגיע? לקוורץ מודול יאנג של $70GPa$.

תשובה:



א. המטען ליח' שטח שיש (בערך אחד), יהיה מסדר גודל של צפיפות המטענים x ההסטה.

$$\sigma \sim n\cdot\Delta x\cdot \overset{\sim e}{q} \longrightarrow \underbrace{E}_{\text{שדה חשמלי שנוצר}} \sim 4\pi\sigma = 4\pi n \underbrace{\Delta x}_{d_1 \frac{dl}{l}}\cdot e$$

ההסטה היא השינוי היחסי באורך הגביש $\frac{dl}{l}$ כפול הגודל של כל מולקולה (דיפול יחיד).

ההסטה dl תתקשר לכח שמפעילים:

$$\frac{F}{A} \sim Y\cdot\frac{\Delta l}{l}$$

והמתח הכולל שיתקבל:

$$V = lE \approx 4\pi n\, d_1 \frac{dl}{l}\cdot e\cdot l = 4\pi n\, d_1 \frac{F}{AY}\, e\cdot l$$

ב. גביש בין האצבעות:

$l \sim 1cm \quad A \sim 1cm^2$

$$n \sim 2gr/cm^3 \times \frac{6\times10^{23}}{\underbrace{20}_{\text{מספר אטומי.}}}\ \#/gr \sim 6\times10^{22}\ \#/cm^3 \qquad e = 4.8\times10^{-10}\, esu$$

$$F \sim 1000gr\times10^3\, cm/sec^2 \sim 10^6\, dyne \qquad Y \sim 70\times10^9\, \frac{N}{m^2} = 7\times10^{11}\, \frac{dyne}{cm^2}$$

$\underbrace{\text{באצבע אפשר להפעיל}}$ קילו.

$$V \approx \frac{1cm\cdot4\pi\cdot6\times10^{22}/cm^3\times4.8\times10^{-10}}{1cm^2\cdot7\cdot10^{11}\,dyne/cm^2}\cdot \underset{d_1=6\mathring{A}}{6\times10^{-8}\,cm}$$

$$\approx 31\underbrace{\frac{esu}{cm}}_{\text{statvolt}} \approx 9kV$$

---

8. אנמיה חרמשית נגרמת כתוצאה מגן פגום. אם הוא מופיע פעמיים (הומוזיגוט), אותו נושא יחלה באנמיה חרמשית (sickle-cell anemia) הגורמת לבעל הגן לא להגיע לגיל פוריות. לעומת זאת, אם יש רק עותק פגום אחד, העותק הנורמלי יאפשר חיים נורמלים והגעה לגיל פוריות. בנוסף, הגן הפגום מחסן טבעית את האדם הנושא ממחלת המלריה. כתוצאה מיתרון זה, גן האנמיה חרמשית אינו נכחד.

(א) ☐ 8 נק'. העריכו מהו מצב שיווי המשקל בין ריכוז גן האנמיה באוכלוסיה לבין הסיכוי לקבל מלריה ולמות לפני הבאת ילדים לעולם.

(ב) ☐ 8 נק'. העריכו מה צריך להיות ריכוז האנמיה החרמשית כיום באוכלוסיה השחורה בארה"ב. הניחו כי האוכלוסיה השחורה הגיעה לארה"ב לפני בממוצע 200 שנה, מאיזורים מוכי מלריה באפריקה, ובהם לכ-10 אחוז מהאוכלוסיה יש את הגן.

(ג) ☐ 4 נק'. מה הסיכוי למות ממלריה לפני הגעה לגיל פוריות באותם איזורים באפריקה?

תשובה: נפתור בקירוב (הבעיה המלאה מתוארת ע"י משוואה ע"ש פרייס)

א. לגן פגום ● יש סיכוי f להפגש עם עוד ● וליצור ●● שימות מאנמיה חרמשית.
לגן פגום ● יש סיכוי $(1-f)$ להפגש עם ○ ולהיות עמיד בפני מלריה.
לגן בריא ○ יש סיכוי f להפגש עם ● ולהיות עמיד בפני מלריה.
לגן בריא ○ יש סיכוי $(1-f)$ להפגש עם עוד ○ וליצור ○○ שימות ממלריה בסיכוי p_m.

אנו דורשים בשיווי משקל ששמור היחס שרידות:

$$\underbrace{(1-f)}_{\text{הסיכוי ל-● לשרוד}} = \underbrace{f+(1-f)(1-p_m)}_{\text{שרידות של ○}}$$

נקבל: $\boxed{p_m \simeq f/(1-f)}$ ובקירוב של $f \ll 1$ $p_m \simeq f$.

ב. ללא מלריה יש כעת עדיפות לגן ○. העדיפות היחסית היא:

$$\frac{○}{●} = \frac{100\%}{(1-f)} \Rightarrow \underset{\text{דור } n}{f_n} = (1-f_{n-1})f_{n-1} = \prod_{\underset{\text{דור}}{g=0}}^{n-1}(1-f_g)f_0$$

כי בסיכוי f יהיה אנמיה חרמשית.

200 שנים הם כ-8 דורות (של 25 שנים). נרצה בקירוב את f_n.

ראשית, נניח $f_g=f_0$ במכפלה ואז:

חישוב סדר אפס, $f_n^{(0)} \simeq (1-f_0)^8 f_0$

כעת, סדר ראשון יהיה בקירוב:

$$f_n^{(1)} \simeq (1-\bar{f})^8 f_0$$

כאשר $\bar{f}$ הוא ה-f הממוצע על המכפלה. נקח $\bar{f} = \frac{f_0+f_n^{(0)}}{2}$. נציב ונקבל:

$$f_n^{(0)} \simeq 0.9^8\cdot 0.1 = 0.043 \rightarrow \bar{f} \simeq 0.072 \rightarrow f_n^{(1)} = (1-\bar{f})^8\cdot 0.1 = 0.055$$

(פתרון מדויק נותן אחרי 8 דורות 0.056).

ג. היות ו-$f \sim p_m$ נקבל שיש סיכוי של כ-10% למות ממלריה לפני הגעה לגיל פוריות.
היום באפריקה, מלריה הורגת כ-1-3 מיליון בני אדם בשנה!