פתרון השאלון במועד א'

שאלה מס' 1

(א) לפי משפט גאוס השטף של השדה החשמלי דרך יחידת גובה של גליל (דמיוני) שצירו מתלכד עם ציר הגליל האינסופי הנדון ורדיוסו r, הוא

$$2\pi r\, E(r) = 2\pi R\sigma / \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r} \quad .... \quad r > R$$

זה הערך המוחלט של השדה החשמלי על-פני הגליל שרדיוסו r. כיוונו של השדה בנקודה על הגליל מתלכד עם הניצב לציר העובר דרך הנקודה, ומגמתו, אם σ חיובי, מהגליל החוצה.

(ב) בהנחה שהמטען על-פני הגליל חיובי, הפוטנציאל על-פני הגליל גבוה מהפוטנציאל בנקודה מחוצה לו. על כן המתח (החיובי) הוא

$$V = \varphi(R) - \varphi(r) = -\int_r^R E(x)\,dx = \int_R^r E(x)\,dx = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int_R^r \frac{dx}{x} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ell n\left(\frac{r}{R}\right) \quad .$$

(ג) על-סמך התוצאה של סעיף (ב), המתח על-פני הקבל הגלילי שבו אנו דנים הוא

$$V = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\ell n\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad .$$

מצד שני, המטען שנושא הגליל הפנימי הוא $Q = 2\pi R_1 L\sigma_1$. אפשר אפוא לחלץ את $\sigma_1 R_1$ מהביטוי למתח, ולהסיק כי

$$V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ell n\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad .$$

ומכאן מקבלים את התוצאה המבוקשת:

$$Q = \pm\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ell n(R_2/R_1)}V \quad .$$

(ד) על-סמך התוצאה האחרונה והגדרת הקיבול ברור כי

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ell n(R_2/R_1)} \quad .$$

(ה) מהנוסחה הבסיסית מקבלים מייד כי

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \frac{\pi\varepsilon_0 L}{\ell n(R_2/R_1)}V^2 \quad .$$

(ו)

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ell n\left(R_2/R_1\right)}=\frac{\left(4\pi\varepsilon_0\right)\left(L/2\right)}{\ell n\left(R_2/R_1\right)}=\frac{0.2}{9\times10^{9}\ \ell n\left(2.192\times10^{-2}/20\times10^{-6}\right)}$$

$$=\frac{\left(200/9\right)\times10^{-12}}{\ell n\left(1096\right)}=\frac{200}{63}\times10^{-12}=3.1746\times10^{-12}\ F=3.1746\ pF\ .$$

(ז) $Q=CV=...=3.1746\times10^{-10}\ coul.$

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times4\pi\right)\left(\frac{Q}{2\pi rL}\right)=\left(9\times10^{9}\right)\left(2\right)\frac{\left(200/63\right)\times10^{-10}}{\left(20\times10^{-6}\right)\left(0.4\right)}=\frac{50}{7}\times10^{6}$$

$$=7.143\times10^{6}\ \frac{volt}{m}$$

(ח) הקיבול של הקבל שחיברנו במקביל הוא חצי הקיבול של הקבל הראשון. על כן שליש המטען יעבור לקבל הקטן, ושני שלישים יישארו על-פני הקבל הגדול.

<u>שאלה מס' 2</u>

(א) נצא מהביטוי להשראות של סליל אינסופי, וממנה נחלץ את n, צפיפות הכריכות. וכיוון שאורך הסליל מטר אחד, הרי צפיפות זאת היא בדיוק מספר הכריכות המבוקש:

$$L=\mu_0 n^2\left(\pi r^2\right)\ell\quad\Rightarrow\quad n^2=\frac{L}{\mu_0\left(\pi r^2\right)\ell}=\frac{1.011\times10^{-3}}{\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(\pi\times0.05^2\right)}=\frac{1.011\times10^{6}}{\pi^2}\ .$$

$$n=\frac{10^3}{\pi}\sqrt{1.011}=320.0558....$$

פירוש הדבר למעשה שמספר הכריכות הוא 320 !

(ב) מהנוסחה הבסיסית הקובעת את עוצמת השדה המגנטי (האחיד) המושרה בסליל (אינסופי) מקבלים מייד את התשובה המבוקשת:

$$B=\mu_0 nI=\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(320\right)\left(10^3\right)=0.4021\ Tesla\ .$$

(ג) ננצל את נוסחת היסוד שממנה הגדרנו בזמנו את ההתנגדות הסגולית. שם דובר על ההתנגדות של גליל, המתכונתית לגובה הגליל ℓ ולערך ההופכי של שטח בסיסו, S. *אצלנו אורך התיל הוא ה"גובה," וחתך התיל הוא ה"בסיס." מכל מקום, התנגדות לולאת תיל הנחושת היא*

$$R=\rho\frac{\ell}{S}=\rho\frac{2\pi r_1}{\pi r_2^2}=2\rho\frac{r_1}{r_2^2}=\left(3.4\times10^{-8}\right)\frac{0.25}{\left(5\times10^{-4}\right)^2}=3.4\times10^{-2}=34\ m\Omega$$

(ד) בתנאי השאלה השטף המגנטי דרך הלולאה זהה לשטף דרך הסליל, לאמור (על-סמך סעיף ב')

$$\Phi=B\,S=\left(0.4021\right)\pi\left(0.05^2\right)=0.4021\times25\pi\times10^{-4}=3.158\times10^{-3}\ \ weber\ .$$

(ה) לפי משפט ההשראה (משפט פרדיי), ובערכים מוחלטים, $V = \dot{\Phi}$. כמו כן ממהלך החישובים עד כה מתאשר, כמובן מאליו, כי: $\Phi \propto I$ וכי על כן $\dot{\Phi} \propto \dot{I}$. מכאן נסיק כי $V = \Phi\left(\dot{I}/I\right)$.

אולם לפי נתוני השאלה הערך המספרי של $\dot{I}$ שווה לערך הזרם עצמו I. הנה כי כן, בלי כל חישוב נוסף, מתברר כי

$$V = 3.158 \;\; mV \;\; .$$

ואשר לזרם בלולאה, על סמך התוצאה האחרונה ועל-סמך סעיף ג', הוא

$$I' = \frac{V}{R} = \frac{3.158 \times 10^{-3}}{34 \times 10^{-3}} = 0.09288 \approx 93\, mA \;\; .$$

(ו) הואיל ומדובר בלולאת תיל שרדיוסה גדול למדי בהשוואה לרדיוס התיל, אפשר להעריך את השדה המגנטי המבוקש כאילו היה השדה המושרה על-ידי זרם בתיל ישר, לאמור

$$B\left(r_2\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I'}{r_2} = \left(10^{-7}\right)\frac{2 \times 0.09288}{5 \times 10^{-4}} = 3.7152 \times 10^{-5} \; tesla \;\; .$$

<u>שאלה מס' 3</u>

(א) גוזרים את הפונקציה $z(x,y,t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t)$, פעמיים לפי x, פעמיים לפי y ופעמיים לפי t, ומקבלים:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -k_x^2 A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k_y^2 A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t)$$

הצבה במשוואת הגלים הדו-מימדית מראה שהפונקציה הנתונה ל-z אכן פותרת את המשוואה אם ורק אם: $k_x^2 + k_x^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2}$

(ב) היות והממברנה היא חלק מתוף, קצוותיה חייבות לקיים z=0 (היכן שהממברנה מחוברת למסגרת התוף). היות ונתון לנו פתרון בו z=0 לאורך x=0 ולאורך y=0, נגדיר את הללו כשני צלעות מן המסגרת. לכן, על מנת לקבל פתרון של גלים עומדים בממברנה, צריך להתקיים z=0 גם על x=Lx וגם על y=Ly.

דהיינו, צריך להתקיים: $k_x L_x = n\pi, n = 1,2,3...$ וגם $k_y L_y = m\pi, m = 1,2,3...$ או לחילופין:

$k_x = \dfrac{n\pi}{L_x}, k_y = \dfrac{m\pi}{L_y}$ כאשר n ו-m מספרים שלמים מ-1 ועד אינסוף.

(ג) ו-(ד) באופן כללי, תדירות מוד מסוים במערכת היא:

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{v}{2\pi}\sqrt{k_x^2+k_y^2}=\frac{v}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2}=\frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{n}{L_x}\right)^2+\left(\frac{m}{L_y}\right)^2}$$

התדירות הנמוכה ביותר במערכת מתקבלת כמובן עבור n=m=1. והיא שווה ל:

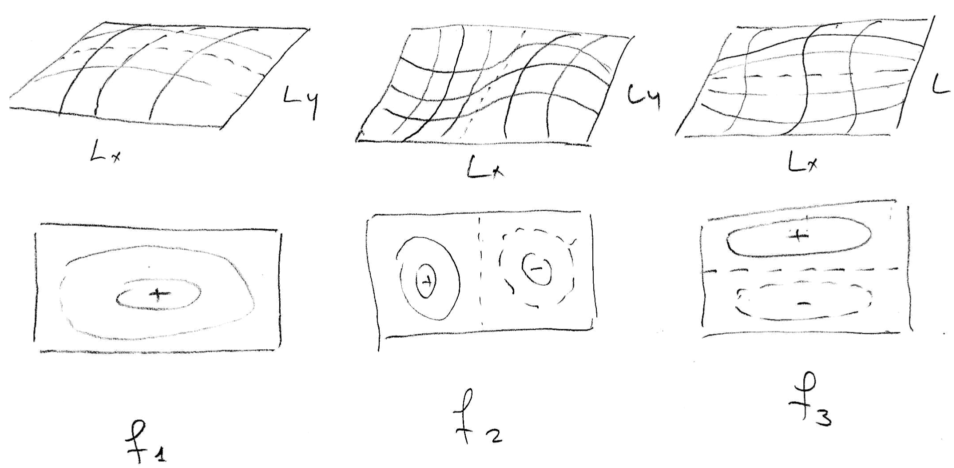
$$f_1=\frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{L_x}\right)^2+\left(\frac{1}{L_y}\right)^2}=\frac{(100m/s)}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{0.15m}\right)^2+\left(\frac{1}{0.10m}\right)^2}=600.9\left[\frac{1}{s}=Hz\right]$$

היות ו-L_x גדול מ-L_y, המוד עם n=2 ו-m=1 יהיה בתדירות נמוכה יותר מאשר המוד עם n=1 ו-m=2.
לכן, התדירות השניה במערכת תהיה:

$$f_2=\frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{L_x}\right)^2+\left(\frac{1}{L_y}\right)^2}=\frac{(100m/s)}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{0.15m}\right)^2+\left(\frac{1}{0.10m}\right)^2}=833.3Hz$$

ואילו התדירות השלישית:

$$f_3=\frac{v}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{L_x}\right)^2+\left(\frac{2}{L_y}\right)^2}=\frac{(100m/s)}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{0.15m}\right)^2+\left(\frac{2}{0.10m}\right)^2}=1054.1Hz$$



(ה) לפי הנוסחה להסחת דופלר של קול, נקבל:

$$\frac{f}{f_0}=\frac{1}{1+{}^{v}/_{v_s}}=\frac{1}{1+0.1}=0.909$$

(היחס v/v_s נמצא במכנה היות והמקור נע, ובסימן "-" היות

והוא מתרחק (כך שהתדר קטן). במקרה שלנו: $f_0=f_1=600.9Hz$ ולכן f=546.3 Hz.