פרופ' יהודה ייבין וד"ר ניר שביב
מכון רקח לפיזיקה

חשמל ואופטיקה לתלמידי ביולוגיה. (תשס"ד).

<u>פרק תשיעי</u>: גלים. משוואת הגלים.

<u>תכונות כלליות של גלים</u>

- כבר עשינו הכרה עם גלים אלקטרו-מגנטיים. עתה נדון בתכונות הכלליות של תופעות גליות. נדון למשל בהפרעה ("פולס") הנעה לאורך מיתר בלי לשנות את צורתה. בזמן $t=0$ צורת הפולס היא $y(x)$. בזמן מאוחר יותר, לאמור כאשר $t>0$, צורת הפולס היא אותה צורה, אלא שהפונקציה $y(x)$ זזה ימינה. הפונקציה המתארת את הגל היא כמובן פונקציה של שני משתנים: $F(x,t)$, והיא כזאת המקיימת $F(x,0)=y(x)$. ברור כי

$$F(x,t)=F(x-vt.0)=y(x-vt) \quad . \tag{9.1}$$

כמו כן ברור שאם הגל נע שמאלה, הפונקציה שתתאר אותו תהיה $y(x+vt)$.

- אם הפונקציה $y(x)$ מחזורית, לאמור אם

$$y(x)=y(x+n\lambda) \quad .... \quad n=1,2,3,... \quad , \tag{9.2}$$

קוראים לקבוע λ אורך הגל. והואיל והגל נע במהירות v, מדברים על המחזור, משך הזמן שבו מתקדם הגל בשיעור λ. זאת אומרת

$$T=\frac{\lambda}{\mathrm{v}} \quad . \tag{9.3}$$

ותדירות הגל היא

$$\nu=\frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \lambda\nu=\mathrm{v} \quad . \tag{9.4}$$

- כפי שכבר הזכרנו, נוח לדון בגלים הרמוניים. זה מוצדק משום שכל פונקציה אפשר לבטא כצירוף של סינוסים וקוסינוסים. נניח אפוא שפרופיל הגל בזמן $t=0$ הוא $y(x)=A\cos(kx)$. כאן A היא המשרעת (אמפליטודה) של הגל, לאמור הערך המירבי שפונקציית הגל מקבלת, ומהו k? – ברור שאם $kx=2\pi$, אז $x=\lambda$. זה מתחייב מהגדרת אורך הגל. מתברר אפוא כי

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \quad . \tag{9.5}$$

מכל מקום, פונקציית הגל היא בסופו של דבר

$$F(x,t)=A\cos[k(x-\mathrm{v}t)]=A\cos(kx-\omega t) \quad , \tag{9.6}$$

מקום שהשוויון השני מסתמך על

$$k\mathrm{v}=\frac{2\pi}{\lambda}\lambda\nu=2\pi\nu\equiv\omega \quad . \qquad (9.7)$$

הנה כי כן, המכפלה $k\mathrm{v}$ אינה אלא התדירות הזוויתית, המאפיינת גם את התנודה של כל נקודה במיתר במקומה. ואת פונקציית הגל אפשר לבטא גם בתור

$$A\cos(kx-\omega t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\right] \qquad (9.8)$$

ראוי לזכור שפונקציית גל זאת משמעותה שבזמן נתון t פרופיל הגל הוא

$$y(x)=A\cos(kx-\varphi_t) \quad .... \quad \varphi_t=\omega t \quad , \qquad (9.9)$$

ובנקודה נתונה x תנודת אלמנט המיתר היא

$$y(t)=A\cos(\omega t-\varphi_x) \quad .... \quad \varphi_x=kx \quad . \qquad (9.10)$$

<u>משוואת הגלים החד-ממדית</u>

- נחזור אל פונקציית הגל ההרמוני שבו דנו, $F(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$, ונברר מה הן שתי נגזרותיה החלקיות מסדר ראשון:

$$F'(x,t)=-kA\sin(kx-\omega t)\ , \quad \dot{F}(x,t)=+\omega A\sin(kx-\omega t) \quad . \qquad (9.11)$$

אנו רואים כי $\dot{F}/\omega=-F'/k$. אולם משוואה דיפרנציאלית זאת אינה מאפיינת אלא גל הנע ימינה. עבור הגל הנע שמאלה נקבל $\dot{F}/\omega=+F'/k$. כדי לקבל משוואה כללית לגלים חד-ממדיים, הנעים ימינה או שמאלה, יש לגזור פעם נוספת:

$$F''=-k^2F\ , \quad \ddot{F}=-\omega^2F \quad . \qquad (9.12)$$

משוואת הגלים הכללית, לאמור לגלים הנעים לכל כיוון, היא אפוא

$$\ddot{F}=\frac{\omega^2}{k^2}F''=\mathrm{v}^2F'' \quad , \qquad (9.13)$$

או, בצורה הנפוצה יותר,

$$F''=\frac{1}{\mathrm{v}^2}\ddot{F} \quad . \qquad (9.14)$$

קיצורו של דבר, כל תופעה המאופיינת על-ידי משוואה כזאת היא גל (חד-ממדי) הנע במהירות v בלי לשנות את צורתו.

<u>מהירות הגלים במיתר</u>

- נעבור עתה מן המתמטיקה אל הפיזיקה, ונברר מהי המהירות של גלים המתפשטים במיתר מתוח. המשוואה היסודית במכניקה היא החוק השני של ניוטון: $\vec{F}=m\vec{a}$. נברר אפוא מהי משוואת התנועה של אלמנט dx במיתר.

- אנו יוצאים מכמה הנחות. קודם כל נניח שההפרעה במיתר קטנה וחלקה. פירוש הדבר שאם פרופיל הגל בזמן כלשהו מתואר על-ידי הפונקציה $y(x)$, והפרופיל ללא הפרעה הוא $y(x)=0$, ואם אורך המיתר המתוח הוא L, אז תמיד ובכל מקום $y(x)<<L$. ואשר להנחה שהפונקציה חלקה, אנו נניח גם כי $y'(x)<<1$.
- ההנחה הראשונה תתבטא למעשה בזאת שהמתח במיתר כמעט אינו משתנה. אם M_0 הוא המתח במיתר הלא-מופרע, אז בכל נקודה במיתר נושא הגל מתקיים $M(x)-M_0<<M_0$. ואילו ההנחה המתייחסת לנגזרת (המרחבית) של הפרופיל משמעותה

$$y'(x)=\tan\vartheta\approx\sin\vartheta\approx\vartheta \quad , \tag{9.15}$$

מקום אשר ϑ (כמובן!) היא הזווית שיוצר המשיק לפרופיל עם הציר x. או בקיצור $y'(x)\approx\vartheta(x)$.

- נדון באלמנט dx של המיתר, לאמור בקטע בין x לבין $x+dx$. קודם לכל נברר מהו השקול של הכוחות הפועלים על האלמנט: $\vec{F}=\vec{M}(x+dx)-\vec{M}(x)$. ואם נפרק את הכוח לרכיביו, אז

$$F_x=M_x(x+dx)-M_x(x)\,,\quad F_y=M_y(x+dx)-M_y(x) \quad . \tag{9.16}$$

אך בהנחות שפירטנו

$$M_x(x)=M(x)\cos\vartheta\approx M_0\ ,\quad M_y(x)=M(x)\sin\vartheta\approx M_0\vartheta \quad . \tag{9.17}$$

אנו מוצאים אפוא כי

$$F_x\approx 0\ ,\quad F_y\approx M_0\,d\vartheta \quad . \tag{9.18}$$

מתברר אפוא שהכוח הפועל על אלמנט המיתר (בקירוב הנדון) ניצב למיתר. עתה נציין שאם הצפיפות הקווית של המיתר היא μ, אז המסה של האלמנט היא $m=\mu\,dx$. ועוד נרשה לעצמנו להשמיט מכאן ואילך את הציון 0 מן M_0. משוואת התנועה של אלמנט המיתר היא אפוא

$$\mu\,dx\,\ddot{y}=M\,d\vartheta \quad\Rightarrow\quad \mu\,\ddot{y}=M\,\vartheta'=M\,y'' \quad . \tag{9.19}$$

והתוצאה המבוקשת היא על כן

$$y''=\frac{\mu}{M}\ddot{y} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{v}^2=\frac{M}{\mu} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{v}=\sqrt{\frac{M}{\mu}} \quad . \tag{9.20}$$

<u>האנרגיה האצורה בגל</u>

- כפי שראינו זה עתה, כל אלמנט במיתר מתנודד מעלה מטה. האנרגיה הקינטית של האלמנט dx היא

$$dK=\frac{1}{2}(\mu\,dx)\left(\dot{y}^2\right) \quad . \tag{9.21}$$

ואשר לאנרגיה הפוטנציאלית, זאת מתבטאת בעובדה שכאשר גל עובר באלמנט האלמנט מתארך, והמתח בו עולה. במקום dx כאשר האלמנט ללא הפרעה, אורכו הוא $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$. מכאן

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx = \left[\sqrt{1+(y')^2} - 1\right]dx \approx \frac{1}{2}(y')^2\,dx \quad . \tag{9.22}$$

כאן ניצלנו את הקירוב, התקף בזכות $y'(x) << 1$,

$$\sqrt{1+(y')^2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(y')^2 \quad . \tag{9.23}$$

ולמי שאינו זוכר, נזכיר את הנוסחה הבסיסית

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots \tag{9.24}$$

האנרגיה הפוטנציאלית הכרוכה בהתארכות האלמנט בשיעור $d\ell$ היא

$$dU = M\,d\ell = \tfrac{1}{2}M(y')^2\,dx \quad . \tag{9.25}$$

הנה כי כן, האנרגיה הכוללת באלמנט dx היא

$$dE = dK + dU = \tfrac{1}{2}\left[\mu\,\dot{y}^2 + M(y')^2\right]dx \quad , \tag{9.26}$$

וצפיפות האנרגיה במיתר היא אפוא

$$\frac{dE}{dx} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}M(y')^2 \quad . \tag{9.27}$$

משדנים בגל ההרמוני $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

$$\dot{y} = \omega\,A\sin(kx - \omega t)\,, \quad y' = -kA\sin(kx - \omega t) \quad , \tag{9.28}$$

לאמור

$$\frac{dE}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(\mu\omega^2 + Mk^2\right)A^2\sin^2(kx - \omega t) \quad . \tag{9.29}$$

אבל עדיין ניתן לפשט את הביטוי הזה על-סמך הקשרים שאנו מכירים:

$$\mathrm{v} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\omega}{\mathrm{v}}\,, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{\mathrm{v}^2} = \omega^2\frac{\mu}{M} \quad \Rightarrow \quad Mk^2 = \mu\omega^2 \quad . \tag{9.30}$$

המסקנה היא כי

$$\frac{dE}{dx} = \mu\omega^2 A^2\sin^2(kx - \omega t) \quad , \tag{9.31}$$

אבל $\left\langle \sin^2\vartheta \right\rangle = \tfrac{1}{2}$, ועל כן, בסופו של דבר, האנרגיה האצורה בקטע מיתר שאורכו L היא

$$E = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 L \quad . \tag{9.32}$$

לבסוף נדון עוד ב<u>הספק</u>. בהקשר הנוכחי מדובר בכמות האנרגיה הזורמת דרך נקודה במיתר ביחידת זמן:

$$P = \frac{dE}{dx}\times\mathrm{v} = \frac{1}{2}\mathrm{v}\mu\omega^2 A^2 \quad . \tag{9.33}$$

<u>עקרון ההרכבה</u>

- ככלל אנו מתייחסים לגלים בתור הפרעות קלות בתווך שבו הם מתפשטים. וכבר הסברנו בהרחבה למה אנו מתכוונים כשאנו מדברים על "הפרעה קלה." וכך, חוץ מאשר בהפרעות חריגות, גלים שונים מתחברים, כלומר פונקציות הגל המתארות אותם מתחברות אלגברית, והגל הכולל הוא פשוט סכום הגלים המרכיבים אותו:

$$y(x-vt)=y_1(x-vt)+y_2(x-vt)+\ \dots\ . \tag{9.34}$$

במילים אחרות, כל גל נע במיתר, למשל, כאילו האחרים אינם קיימים. כל מרכיב אינו מושפע על-ידי המרכיבים האחרים.

<u>התאבכות</u>

- הבה נדון עתה בשני גלים הרמוניים זהים, בעלי אותה משרעת ואותו אורך גל, השונים זה מזה רק בפזה:

$$y_1=A\cos(kx-\omega t)\,,\quad y_2=A\cos(kx-\omega t+\varphi)\ . \tag{9.35}$$

על-סמך הזהות הטריגונומטרית

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]\ , \tag{9.36}$$

סכום שני הגלים שבהם אנו דנים הוא

$$y=y_1+y_2=2A\cos\left(kx-\omega t+\tfrac{1}{2}\varphi\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right) \tag{9.37}$$

הבה נבחן את הגל הכולל הזה: הוא בעל אותו אורך גל, אותה תדירות והפרש פזה $\frac{1}{2}\varphi$ ביחס לכל אחד משני מרכיביו. לעומת זאת, המשרעת של הגל הכולל היא

$$A_{1+2}=2A\cos\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)\ . \tag{9.38}$$

המשרעת תלויה אפוא בהפרש הפזה φ בין שני המרכיבים. היא יכולה להיות $2A$ (אם $\varphi=2n\pi\ ,\quad n=0,1,2,3,\dots$), כאשר הגל האחד מחזק ומגביר את האחר. זה המקרה ששני המרכיבים בפזה (כמובן!), ומדברים על <u>התאבכות בונה</u>.

- אולם, וכמובן, אם $\varphi=(2n+1)\pi\ ,\quad n=0,1,2,3,\dots$, הגל נעלם, ז"א $A_{1+2}=0$, ומדברים על התאבכות הורסת.

<u>פעימות</u>

- עתה נדון בשני גלים הרמוניים בעלי אותה משרעת, אבל תדירויות שונות:

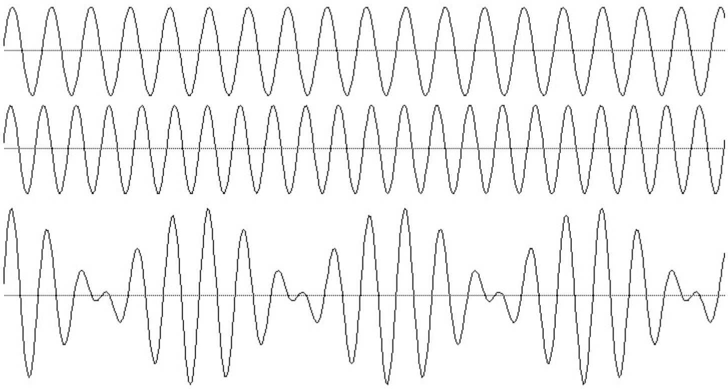
$$y_1=A\cos(k_1x-\omega_1t)\,,\quad y_2=A\cos(k_2x-\omega_2t)\ . \tag{9.39}$$

אבל נזכיר שלמרות ה"שוני" בין שני הגלים האלה, $\omega_1/k_1=\omega_2/k_2=\mathrm{v}$. על סמך הזהות הטריגונומטרית שניצלנו קודם, מחיבור שני הגלים שבהם אנו דנים עתה נקבל

$$\begin{aligned} y=y_1+y_2&=2A\cos\left[\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)x-\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)x-\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right] \\ &=2A\cos(\bar{k}x-\bar{\omega}t)\cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta k\,x-\tfrac{1}{2}\Delta\omega\,t\right) \end{aligned}\ . \tag{9.40}$$

הבה נבחן את פרופיל הגל הזה, נאמר בזמן $t = 0$:

$$y(x) = 2A\cos\left(\bar{k}\,x\right)\cos\left(\frac{1}{2}\Delta k\,x\right) \quad . \tag{9.41}$$



נעיין בתרשים ונראה מה קורה. לתופעה הזאת קוראים "פעימות" (ובאנגלית beats). מדברים על גל נושא (carrier) ועל אִפנוּן (מודולציה). פרופיל הגל הנושא הוא $2A\cos\left(\bar{k}x\right)$. אך חשוב לשים לב שאין מדובר כאן באורך גל ממוצע, אלא במספר הגל הממוצע

$$\bar{k} = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda_c = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad . \tag{9.42}$$

אולם, כפי שברור, המשרעת של הגל הנושא משתנה כפונקציה של x, והיא

$$2A\cos\left(\frac{1}{2}\Delta k\,x\right) \quad . \tag{9.43}$$

הפונקציה הזאת נקראת גל האפנון (גל המודולציה). אלה הן הפעימות, שאפשר לשמוע כאשר מפעילים שני מזלגות קול בעלי תדירויות שונות אך קרובות. אורך הגל של גל האפנון, כפי שקל להראות, הוא

$$\lambda_m = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\left|\lambda_2 - \lambda_1\right|} \quad . \tag{9.44}$$

ומהי תדירות הפעימות? – צריך להיות מובן מאליו שאם $k_m = \Delta k/2$, אזי (כפי שראינו בעצם $\omega_m = \Delta\omega/2$. והתדירות המתאימה היא $\nu_m = \omega_m/2\pi$. אבל זאת <u>אינה</u> תדירות הפעימות, שהיא <u>כפולה</u> מתדירות זאת! –

$$\nu_b = \Delta\nu = \left|\nu_2 - \nu_1\right| \quad . \tag{9.45}$$

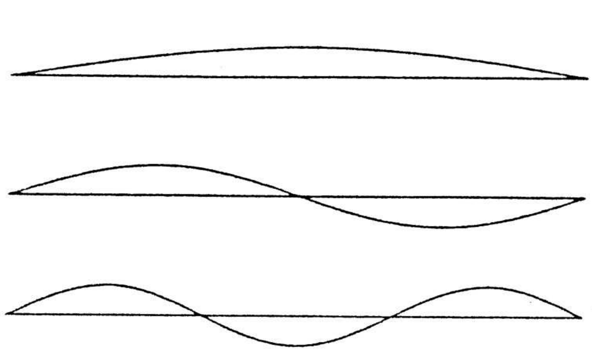
<u>גלים עומדים</u>

- אם נחבר שני גלים זהים, שהאחד נע ימינה והשני שמאלה, לאמור אם

$$y = A\cos(kx - \omega t) + A\cos(kx + \omega t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) \quad , \tag{9.46}$$

מתקבל גל עומד: כל נקודה (במיתר למשל) נעה מעלה מטה בתדירות זוויתית ω, והמשרעת של התנודות האלה משתנה עם מיקום הנקודה לפי $A'(x) = 2A\cos(kx)$.

- הצמתים (nodes) מתקבלים בנקודות שעבורן $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$, לאמור בנקודות



$$x = \frac{2n+1}{4}\lambda \quad .... \quad n = 0,1,2,3,... \tag{9.47}$$

כדי להמחיש את העניין, נדון בגלים עומדים במיתר שאורכו L. כאן קובעים תנאי השפה, ולא תנאי ההתחלה שבהם אנו מורגלים. ברור שקצות המיתר הקבועות חייבות להיות צמתים של התנודות האפשריות. על כן הגל היסודי הוא זה המאופיין על-ידי צמתים רק בקצות המיתר:

$$y_0 = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \pi\frac{\mathrm{v}}{L} \ . \tag{9.48}$$

התדירות היסודית מתחייבת מהקשר היסודי $\mathrm{v} = \lambda\nu = \omega/k$.

- הגל העליון הראשון מאופיין על-ידי צומת אחד באמצע המיתר:

$$y_1 = A\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos(\omega_1 t) \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 2\pi\frac{\mathrm{v}}{L} \ . \tag{9.49}$$

והגל העליון השני על-ידי שני צמתים בין הקצוות:

$$y_2 = A\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\cos(\omega_2 t) \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 3\pi\frac{\mathrm{v}}{L} \ , \tag{9.50}$$

וכן הלאה.

- אלה הם אפוא אופני התנודה האפשריים של מיתר קשור בשני הקצוות. אורכי הגל המתאימים, הידועים גם כאורכי הגל העצמיים של המיתר המסוים שאורכו L הינם

$$\lambda_0 = 2L \ , \quad \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n+1} \ . \tag{9.51}$$

התדירויות העצמיות המתאימות (על-סמך $\nu = \mathrm{v}/\lambda$) הן

$$\nu_0 = \frac{\mathrm{v}}{2L} \ , \quad \nu_n = (n+1)\nu_0 \ . \tag{9.52}$$

<u>גלים במישור ובמרחב ומושג חזית הגל</u>

- עד כאן עסקנו בגלים חד-ממדיים, למשל הגלים המתקדמים במיתר מתוח, ואינם משנים את צורתם. לשון אחר, דנו בפרופיל קבוע הנע במהירות קבועה. עתה נדון בגלים דו- או תלת-ממדיים. לגבי גלים אלה לא נוכל לדבר על פרופיל שאינו משתנה, מכיוון שיש להביא בחשבון את חוק שימור האנרגיה, כפי שנראה מייד.

- נדבר למשל על גלים על פני נוזל. הפרעה בנקודה נתונה על-פני הנוזל מתפשטת ממרכז ההפרעה באופן איזוטרופי, לאמור לכל הכיוונים באותה מידה. עלינו להגדיר את המושג <u>חזית גל</u>. זה המעגל שרדיוסו גדל והולך עם הזמן, והנתון בנוסחה המובנת מאליה $r = \mathrm{v}t$ (אם ההפרעה חלה בראשית הצירים בזמן $t = 0$). האנרגיה של הגל חייבת להישמר, והיא מתחלקת באותה מידה לאורך

החזית. מה שבזמן t_1 מתחלק לאורך $\ell_1 = 2\pi v t_1$, מתחלק בזמן המאוחר יותר t_2 לאורך $\ell_2 = 2\pi v t_2$. אנו יודעים כבר שהאנרגיה (ליחידת אורך) מתכונתית אל A^2, ולכן, אם מדובר בגל הרמוני, אז המשרעת שלו יורדת כמו $1/\sqrt{r}$. ואילו משמדובר בגלים תלת-ממדיים, וחזיתות הגל הן כדורים, יורדת המשרעת (של גל הרמוני) כמו $1/r$.

- ועוד נציין שבתחום מרחבי מצומצם, הרחק ממרכז ההפרעה, תחום שממדיו הקוויים קטנים בהשוואה למרחק ממרכז ההפרעה, הגל הוא למעשה גל מישורי.

<u>גלי קול</u>

- גלי קול בגז, וגם במוצק, הם גלים <u>אורכיים</u>. הפרופיל של גלים אלה הוא פרופיל צפיפות או פרופיל לחץ. אבל הוא מקיים את התנאי שהדגשנו שעניינו ההפרעה שהיא אכן הפרעה בלבד. גם ברעש "אימים" (למשל בסביבת מטוס סילון ממריא) תנודות מולקולות האוויר ממצבן בשיווי משקל אינו עולה על כעשירית מ"מ, והצפיפות אינה משתנה יותר מאשר 1%.

- שוב נדון בגלים הרמוניים, או ליתר דיוק בצירופים של גלים הרמוניים. התדירות קובעת את גובה הצליל. טרם הזכרנו זאת, יחידת התדירות נקראת הֶרץ: תדירות של אחד בשנייה היא 1 הֶרץ. טווח השמיעה שלנו הוא 20 עד 20000 הרץ. גלי קול בתדירות גבוהה יותר נקראים <u>על-קוליים</u>. אך כלבים וכמה בעלי חיים אחרים, שומעים גם בתחום זה.

<u>עוצמת הקול. דציבלים.</u>

- עוצמת הקול אינה אלא ההספק של גלי הקול, לאמור האנרגיה הזורמת דרך יחידת שטח ביחידת זמן. והואיל ואנו דנים בגלי קול במרחב, מדובר בהספק למטר רבוע. העוצמה נמדדת אפוא ביחידות W/m^2. סף השמיעה שלנו הוא (בערך!) $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$. אגב, ערך זה אינו מקרי, שכן לו היה הסף נמוך יותר, היינו שומעים כל הזמן את "רעש" זרימת הדם בעורקינו. מכל מקום, הואיל ותחום עוצמות הקול שלהן האוזן רגישה משתרע על-פני כשנים-עשר סדרי גודל, מקובל למדוד את עוצמת הקול לפי קנה-מידה לוגריתמי. היחידה של עוצמת הקול נקראת דֶציבֶּל (מילולית פירוש כינוי היחידה "עשירית בֶּל," והכוונה לממציא הטלפון, אלכסנדר גרהם בל):

$$\beta\, dB = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad . \tag{9.53}$$

כדי לקבל מושג על עוצמות כמה רעשים מצויים, נעיין בטבלה הבאה:

הקול	העוצמה (W/m^2)	רמת העוצמה (dB)
נשימה	10^{-11}	10
לחישה	10^{-10}	20
שיחה רגילה	10^{-6}	60
רעם עז	10^{-1}	110
סף הכאב	1	120

קריעת עור התוף 10^4 160

<u>מהירות הקול</u>

- מהירות הקול באוויר היא

$$\text{v} = \sqrt{1.4\,\frac{p_0}{\rho_0}} \quad . \tag{9.54}$$

נציין רק שהקבוע 1.4 אופייני לאוויר. לגזים אחרים קבועים אחרים. מכל מקום, במה שנקרא תנאי טמפרטורה, לחץ וצפיפות תקניים, לאמור:

$$T_0 = 0^\circ\,C\ , \quad p_0 = 1\,atm = 1.01\times 10^5\,\frac{N}{m^2}\ , \quad \rho_0 = 1.29\,\frac{kg}{m^3} \quad , \tag{9.55}$$

מהירות הקול היא

$$\text{v} = \sqrt{1.4\,\frac{1.01\times 10^5}{1.29}} = 331\,\frac{m}{s} \quad . \tag{9.56}$$

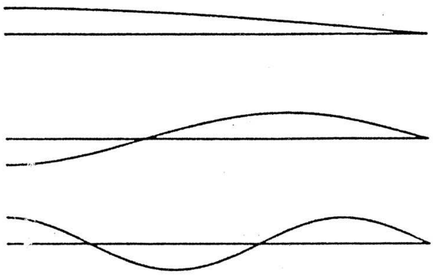
זאת כאמור היא המהירות באוויר בטמפרטורה $0^\circ\,C$. ב-20° המהירות היא $344\,m/s$, וב-100° היא $386\,m/s$. לעומת זאת, בהליום למשל, בתנאים התקניים, מהירות הקול היא $965\,m/s$.

- נציין כי במים מהירות הקול היא ≈ 1500, בחמרן (אלומיניום) היא 5100 ובמִינֵי זכוכית המהירות היא בתחום 5000 עד 6000 מטר בשנייה.

<u>גלים עומדים בצינור</u>

- צינור סגור בשני הקצוות אנלוגי למיתר קשור בשני הקצוות. הגלים העומדים בצינור סגור זהים (מבחינה מתמטית) לגלים העומדים שבהם דנו כבר. הגלים הבאים בחשבון הם אלה שבכל קצה יש צומת. בצומת מתיחות המיתר מֻרַבִּית (ותנודת המיתר מהמצב הבלתי-מופרע מתאפסת). בצינור הנושא את גלי הקול העומדים האנלוג של המתיחות היא צפיפות הגז ועל כן בצמתים הצפיפות מרבית, והלחץ (!) מתאפס. הנה כי כן ראוי לשים לב כי במיתר המתוח אפשר לדבר על הגל עצמו, כביכול, פרופיל המיתר בכל רגע, ומצד שני אפשר לדבר על "גל" המתיחות במיתר. על-סמך דיוננו צריך להיות ברור שהבדל הפזה בין שני הגלים האלה הוא 90°, או $\pi/2$, או $\lambda/4$. ובאותה מידה בצינור הסגור ניתן לדון בגל הצפיפות או בגל הלחץ, שהבדל הפזה ביניהם הוא, כאמור, 90°.

- מעניין לדון בצינור הסגור בצד אחד ופתוח בשני. באשר לגלים העומדים בצינור כזה ברור שבצד הסגור צומת ואילו בצד הפתוח שיא הפרופיל. עיון קל בבעייה מוליך למסקנה שהגל היסודי בצינור כזה שעבורו אורך הצינור L הוא רבע גל ! הבה נרשום את המאפיינים של הגל היסודי ושל שני הגלים העליונים הראשונים:



$$\lambda_0 = 4L\ , \quad \nu_0 = \frac{\mathrm{v}}{4L}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{3}\ , \quad \nu_1 = 3\nu_0 \qquad (9.57)$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{5}\ , \quad \nu_2 = 5\nu_0$$

ובאופן כללי, כמובן כמעט מאליו כי:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{2n+1}\ , \quad \nu_n = (2n+1)\nu_o \ . \qquad (9.58)$$

<u>אפקט דופלר</u>

- אנו דנים בגלי קול המתפשטים במרחב. חזיתות הגל הן כדורים חד-מרכזיים. לשם הפשטות נניח שמקור גלי הקול הוא משרוקית הפועלת למשכי זמן קצרים שההפסקות ביניהם נמשכים T שניות. משכי הפעולה הקצרים משמעם שהם קצרים בהשוואה לזמן המחזור T. המאזין בנקודה כלשהי שומע את צפצופי המשרוקית בתדירות $\nu = 1/T$. אגב, צליל "טהור" המתאים לתדירות הזאת יישמע אם המקור משדר גל הרמוני בתדירות הנדונה.
- כדי לסבר את האוזן נדבר על מַשדר (מקור הקול) ועל מַקלט (או גלאי). מה קורה אם המקלט נע במהירות V לעבר המשדר, לאורך ישר העובר דרך המשדר? – המהירות היחסית בין המשדר לחזיתות הגל היא $\mathrm{v}' = \mathrm{v} + V$. אורך הגל אינו משתנה כמובן ומתברר אפוא כי המאזין (המקלט) שומע את אותות המשדר במדירות

$$\nu' = \frac{\mathrm{v}'}{\lambda} = \frac{\mathrm{v}+\mathrm{V}}{\mathrm{v}/\nu} = \nu\left(1 + \frac{V}{\mathrm{v}}\right)\ , \qquad (9.59)$$

מקום שהסתמכנו כמובן על הקשר הבסיסי $\mathrm{v} = \lambda\nu$. נציין עוד שאת המקלט מתרחק מהמשדר (לאורך הישר המחבר אותם) אז כמובן התדירות הנקלטת היא

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{V}{\mathrm{v}}\right)\ . \qquad (9.60)$$

אם רוצים, אפשר לדון בשינוי היחסי בתדירות, לאמור במנה

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \pm\frac{V}{\mathrm{v}}\ . \qquad (9.61)$$

הסימן מינוס מתאים למקרה שבו המקלט מתרחק מהמשדר. עם עליית מהירות המקלט (המתרחק!) יורדת התדירות הנקלטת במשדר והולכת, עד המקרה המיוחד $V = \mathrm{v}$. במקרה הגבולי הזה ברור כי $\nu' = 0$. וכאשר $V > \mathrm{v}$ משיג המקלט את חזיתות הגל ועובר על-פניהן. גם מהנוסחה הכללית (60) וגם משיקולים פשוטים ברור כי אז

$$\nu' = \nu\left(\frac{V}{\mathrm{v}} - 1\right)\ . \qquad (9.62)$$

- נדון עתה במקרים שבהם המקלט נח והמשדר נע לקראתו במהירות, נאמר, U. אז

$$\lambda' = \lambda - UT = \lambda - \frac{U}{\nu} \quad . \tag{9.63}$$

ומכאן אנו מסיקים כי

$$\nu' = \frac{\mathrm{v}}{\lambda'} = \frac{\mathrm{v}}{\lambda - \mathrm{U}/\nu} = \frac{\mathrm{v}}{(\mathrm{v}/\nu) - (U/\nu)} = \nu \frac{1}{1 - U/\mathrm{v}} \quad . \tag{9.64}$$

אולם כדאי להיווכח שאם $U << \mathrm{v}$, אז

$$\nu' \approx \nu\left(1 + \frac{U}{\mathrm{v}}\right) \; , \tag{9.65}$$

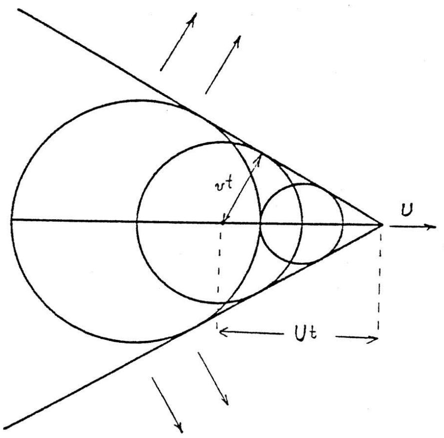
לאמור, בקירוב של מהירויות U קטנות, מתקבלת אותה נוסחה בין אם המקלט נע לקראת המשדר הנח או להיפך.

- התופעה של שינוי תדירות הנגרם בגלל תנועות המקלט או המשדר ידועה בתור אפקט דופלר. מכל מקום, סיכום כל המקרים האפשריים מתמצה בטבלה הבאה

המשדר נע לקראת המקלט *המקלט נע לקראת המשדר*	$\nu' = \dfrac{\mathrm{v} + V}{\mathrm{v} - \mathrm{U}}$
המשדר נע לקראת המקלט *המקלט מתרחק מן המשדר*	$\nu' = \dfrac{\mathrm{v} + \mathrm{V}}{\mathrm{v} + \mathrm{U}}$
המשדר מתרחק מן המקלט המקלט נע לקראת המשדר	$\nu' = \dfrac{\mathrm{v} - \mathrm{V}}{\mathrm{v} - \mathrm{U}}$
המקלט מתרחק מן המשדר *המקלט מתרחק מן המשדר*	$\nu' = \dfrac{\mathrm{v} - \mathrm{V}}{\mathrm{v} + \mathrm{U}}$

<u>גלי הלם</u>

- כפי שראינו, כאשר מקור קול נע לקראת גלאי אז $\nu = \nu_0 / (1 - U/\mathrm{v})$. נוסחה זאת תְקֵפה למהירויות תת-קוליות (סוב-סוניות), לאמור כל עוד $U < \mathrm{v}$. התדירות ν גדלה והולכת עם מהירות המקור U, וכאשר U מתקרבת אל v, התדירות שואפת לאינסוף.



- במהירויות על-קוליות (סופר-סוניות) של המקור, כאשר $U > \mathrm{v}$, מתקבל המצב המתואר בתרשים (המתאים למקרה $U = 2\mathrm{v}$): חזיתות כל הגלים מגיעות באותו זמן למעטפת החרוט (הקונוס) שחודו במקור הקול הנע, וצירו הוא ציר תנועת המקור. חרוט זה נקרא חרוט מָך, והוא מתאר את גל ההלם הידוע בשפת היום-יום כ"בּוּם על-קולי." המנה $m = U/\mathrm{v}$ נקראת מספר מך. מחצית זווית הפתיחה של חרוט מך נתונה בקשר $\sin\vartheta = 1/m$, כפי שקל לראות בתרשים.