פרופ' יהודה ייבין וד"ר ניר שביב
מכון רקח לפיזיקה

חשמל ואופטיקה לתלמידי ביולוגיה. (תשס"ד).

<u>פרק שמיני</u>: השדה המגנטי בתווכים חומריים. סיכום: – משוואות מקסוול. גלים אלקטרו-מגנטיים.

<u>המומנט המגנטי של אטום</u>

- את דיונינו על מגנטיות בתווכים חומריים, ובמיוחד בחומרים מגנטיים, מתאים לפתוח במודל הקלסי של האטום, לפיו נעים האלקטרונים במסילות מעגליות סביב גרעין מרכזי כבד. במודל כזה האלקטרון הנע במסילתו מהווה לולאת זרם זעירה, והמומנט המגנטי של האטום כרוך בתנועה זאת. הגם שהמודל האטומי הנדון פשטני ביותר, התחזיות המתבססות עליו מתיישבות במידה רבה עם המסקנות המתחייבות מתורת הקואנטים המתארת נכונה את המערכות המיקרוסקופיות.
- נתאר אפוא לעצמנו אלקטרון הנע במהירות קבועה v במעגל שרדיוסו r סביב הגרעין. הזרם המתאים לתנועה זאת הוא

$$I=\frac{e\mathrm{v}}{2\pi r}=\frac{e\omega}{2\pi}=\frac{e}{T} \quad . \tag{8.1}$$

הביטויים השונים עבור הזרם מתחייבים מן ההגדרות של המהירות הזוויתית והמחזור. המומנט המגנטי הכרוך בטבעת הזרם שלנו הוא

$$\mu=IA=\frac{e\mathrm{v}}{2\pi r}\pi r^2=\tfrac{1}{2}e\mathrm{v}r \quad . \tag{8.2}$$

ועוד נזכיר שהתנע הזוויתי המסילתי של האלקטרון הוא $L=m\mathrm{v}r$, ועל כן אפשר לבטא את המומנט המגנטי גם בתור $\mu=(e/2m)L$. נציין רק שכיוון שהאלקטרון נושא מטען שלילי, הכיוונים של הווקטורים $\vec{\mu}$ ו-$\vec{L}$ נגדיים (ושניהם ניצבים למישור התנועה של האלקטרון).

- אחת מהנחות היסוד בתורת הקואנטים היא שתנע זוויתי מסילתי הוא גודל בדיד, והערכים שהוא יכול לקבל הם רק הכפולות של

$$\hbar=\frac{h}{2\pi}=1.06\times10^{-34}\,J\cdot s \quad . \tag{8.3}$$

הקבוע h ידוע בתור הקבוע של פלנק. מכל מקום הערך המזערי של המומנט המגנטי שבו אנו דנים הוא

$$\mu=\frac{e\hbar}{2m} \quad . \tag{8.4}$$

"למרבה הפלא," אף כי מרבית האטומים כוללים אלקטרונים רבים, המומנט המגנטי שלהם מתאפס, או שערכו קטן. הסיבה היא שבדרך כלל המומנט הנתרם על-ידי אלקטרון אחד מתבטל על-ידי אלקטרון אחר הנע סביב הגרעין, באותה מסילה ובאותה מהירות, אבל במגמה נגדית.

- בנוסף לתנע הזוויתי המסילתי, תכונה יסודית של האלקטרון היא שהוא נוהג כסביבון, לאמור סב על צירו (ממש כמו כדור הארץ המקיף את השמש במסילה כמעט מעגלית ויחד עם זאת סובב על צירו). לתכונה זאת קוראים (בלועזית!) ספין. פירוש המונח בעברית: סחרור. כתוצאה מכך יש לו גם מומנט מגנטי עצמי, ששיעורו הוא אכן

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \quad . \tag{8.5}$$

הציון התחתי B מציין שהגודל הזה, המומנט המגנטי העצמי של האלקטרון ידוע בתור המגנטון של בוהר. ושוב, באטומים או במולקולות הכוללים אלקטרונים רבים אלה מסתדרים בזוגות בעלי ספינים נגדיים המבטלים זה את זה. אבל מובן שלאטומים בעלי מספר אי-זוגי של אלקטרונים תמיד יש מומנט מגנטי שמקורו בספין.

<u>שדה המגנוט ושדה העזר המגנטי H</u>

- המצב המגנטי של תווך חומרי מאופיין באמצעות שדה וקטורי, $\vec{M}$, הנקרא שדה המִגנוּט. מבחינת המבנה האטומי של החומר, כל אטום הוא מגנט אלמנטרי (לאמור הוא בעל מומנט מגנטי). בדרך כלל המגנטים הללו אינם מסודרים, כל אחד יש לו כיוון משלו. הסכום הווקטורי של המומנטים המגנטיים ליחידת נפח הוא הוא מִגנוט התווך.

- נדון בתחום מרחבי מסוים, שבו שורר שדה מגנטי, נאמר $\vec{B}_o$, המושרה על-ידי מערכת זרם כלשהי. את התחום המרחבי הזה ממלאים בתווך חומרי ממוגנט, בעל שדה המִגנוט $\vec{M}$. או אז השדה המגנטי הכולל בתחום הוא $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$, מקום שהשדה $\vec{B}_m$ הוא השדה המושרה על-ידי התווך הממוגנט. הקשר עם וקטור המִגנוט הוא $\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$. בשלב זה נוח להגדיר שדה עזר

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M} \quad , \tag{8.6}$$

הנקרא לעתים בספרות בשם שדה העוצמה המגנטית. באמצעות הגדרה זאת אנו מקבלים

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right) \quad .$$

נציין עוד שהממדים של העוצמה המגנטית ושל המִגנוט הם אמפר למטר. כדי להבין עניין זה נדון בסליל (אינסופי) בריק. בתוך הסליל כמובן $\vec{M} = 0$, ועל כן $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. מצד שני אנו יודעים כי בליבת הסליל הריקה השדה המגנטי הוא $\mu_0 nI$, ומכאן

$$\vec{H} = nI \quad . \tag{8.7}$$

כזכור, n הוא מספר כריכות הסליל ליחידת אורך, והממד הנזכר מתבהר.

<u>מיון החומרים המגנטיים</u>

- בדרך כלל, ובעצם עבור מרבית החומרים, המִגנוט מתכונתי לשדה העוצמה המגנטית:

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad . \tag{8.8}$$

המקדם חסר הממדים χ נקרא כושר הקיטוב המגנטי. אם כושר הקיטוב חיובי, המִגנוט באותה מגמה כמו שדה העוצמה המגנטית. חומר שזה מצבו נקרא חומר פָּרָמגנטי. ואם χ שלילי מדובר בחומר דיאמגנטי. כאמור, מרבית החומרים הם מאחד משני הסוגים הללו. למשל, עבור זהב $\chi = -3.6 \times 10^{-5}$, ועבור פלטינה $\chi = 2.9 \times 10^{-4}$. ערכים אלה טיפוסיים עבור החומרים הפרמגנטיים והדיאמגנטיים, ואפשר לקבוע שעבור חומרים כאלה כושר הקיטוב קטן מאוד ולמעשה זניח. זה אינו המצב לגבי ברזל, קובלט וניקל, וגם לא לגבי כמה חומרים אקזוטיים – גדוליניום ודיספרוזיום. אלה נקראים חומרים פֶרומגנטיים.

- אפשר לנצל את הקשר המגדיר את $\vec{H}$ כדי להגדיר גדלים מקובלים נוספים, לאמור

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0\left(\vec{H} + \chi\vec{H}\right) = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu\vec{H} \quad . \tag{8.9}$$

הקבוע μ נקרא הפֶרמיאביליות של התווך החומרי. את מיון החומרים המגנטיים אפשר אפוא למיין גם לפי הפרמיאביליות:

$$\begin{aligned} &\mu < \mu_0 && \text{עבור חומרים דיאמגנטיים} \\ &\mu > \mu_0 && \text{עבור חומרים פרמגנטיים} \\ &\mu >> \mu_0 && \text{עבור חומרים פרומגנטיים} \end{aligned} \tag{8.10}$$

אולם יש לשים לב לעובדה שהקשר $\vec{B} = \mu\vec{H}$ כפשוטו אינו תקף לגבי חומרים פֶרומגנטיים, כפי שיתברר לנו בהמשך הדברים. וכאמור בדרך כלל אפשר להתעלם מן המגנטיות של החומרים שאינם פרומגנטיים, ולקבוע שמבחינה מעשית עבורם $\mu \approx \mu_0$. מוצדק אפוא שבראש ובראשונה נתעניין בחומרים הפֶרומגנטיים.

<u>פרומגנטיות</u>

- כבר מנינו את החומרים הפֶרומגנטיים, ובראשם ברזל. לאטומים של חומרים אלה מומנט מגנטי קבוע. יתר על כן, מגנטים אלמנטריים אלה, אפילו בהשפעת שדות מגנטיים חיצוניים חלשים למדי, נוטים להתקבץ בתחומים שבהם כולם מקבילים זה לזה. תחומים אלה נשארים ממוגנטים גם אחרי שהשדה החיצוני נעלם. נפח טיפוסי לתחומים הממוגנטים האלה הוא 10^{-10} סמ"ק, ומספר האטומים בתחום הוא מסדר הגודל של 10^{19}. בדגם לא ממוגנט של חומר פֶרומגנטי מפולגים כיווני המומנט המגנטי של כל תחום ותחום האופן אקראי. אולם משמפעילים על הדגם שדה מגנטי נוטים התחומים להתכוון ולהסתדר בכיוון השדה החיצוני והתווך מתמגנט והולך. עם הפסקת הפעולה של השדה החיצוני נשאר הדגם ממוגנט בשיעור זה או אחר בכיוון השדה החיצוני. ראוי לציין שהנאמר כאן על מִגנוט באמצעות שדה חיצוני ומגנוט שיורי תקף בטמפרטורות רגילות ("טמפרטורות החדר"), שבהן העירור התרמי אינו מספיק לפרק את התחומים המגנטיים. אולם לכל חומר פֶרומגנטי יש טמפרטורה שבה נעלם המִגנוט. הטמפרטורה הזאת ידועה בתור נקודת קירי (Curie), ועבור ברזל היא $770°C$ עבור קובלט 1130, ניקל 358, ועבור גדוליניום 16.

• נזכיר את הקשר $\vec{B} = \mu\vec{H}$, ואת העובדה שעבור פֶּרומגנטים $\mu >> 1$, וערך הפרמיאביליות יכול להגיע לאלפים, ואפילו עד מיליון. כאמור עבור חומרים אלה הקשר אינו ליניארי, והכוונה היא לשיפוע המירבי של העקומה $B = B(H)$. איך נראית עקומה כזאת? אם נתחיל בדגימה ממוגנטת חלקית, ונפעיל עליה שדה חיצוני, נאמר שדה מגנטי המושרה על-ידי סליל שבתוכו נמצאת הדגימה, אזי עם הגברת השדה החיצוני תלך הדגימה ותתמגנט. פירוש הדבר שיותר ויותר תחומים מגנטיים יסתדרו בכיוון השדה החיצוני. אבל ברור מראש שתהליך זה לא יוכל להימשך בלי סוף, משום שבשלב מסוים יהיו כבר כל התחומים מקבילים לשדה החיצוני, לאמור המִגנוט מגיע לרוויה!

• במצב המִגנוט המירבי, מִגנוט הרוויה, נתחיל להפחית את הזרם בסליל, את עוצמת השדה החיצוני. המִגנוט ייחלש, אבל "יפגר" אחרי הזרם. הואיל ומדובר בתווך פֶּרומגנטי, תמיד קיים מִגנוט שיורי. משנגיע לזרם אפס, להיעלמות השדה החיצוני, יישאר מִגנוט סופי חיובי בתווך. ואם עתה נהפוך את כיוון הזרם, יתחילו התחומים המגנטיים להסתדר במגמה הנגדית, עד שלבסוף נקבל מִגנוט רוויה במגמה הנגדית.

• נחזור על התהליך של הקטנת השדה החיצוני, ושוב כאשר השדה יתאפס, יישאר בתווך מִגנוט שיורי (במגמה הנגדית). אחרי השלמת המעגל, וכאשר נגיע למִגנוט הרוויה במגמה המקורית, תתקבל העקומה של B כפונקציה של H כקו סגור. העקומה הזאת נקראת עקומת חשל, או בלועזית עקומת היסטרזיס (המילה האחרונה מקורה יווני ומובנה פיגור – במובן שהזכרנו כבר).

<u>תווכים פָּרָמגנטיים</u>

• אלה חומרים שאטומיהם בעלי מומנט מגנטי חלש במובן זה שהפעילות המגנטית ההדדית בין שכנים אינה מספיקה ליצירת תחומים מגנטיים, אינה מספיקה למִגנוט עצמי. עבור חומרים אלה $\mu - \mu_0$ חיובי, אך מתאפס בקירוב טוב מאוד. בהשפעת שדה חיצוני מופיע קיטוב מגנטי בתווך, אולם ,תהליך זה מתחרה בתנועה התרמית השואפת לבטלו. מבחינה ניסויית מתקיים הקשר הידוע כחוק קירי:

$$M = C\frac{B}{T} \quad , \qquad (8.11)$$

מקום אשר T היא הטמפרטורה המוחלטת (ז"א K °) והמקדם C ידוע בתור הקבוע של קירי.

• בנקודה זאת מעניין להעיר שחומר פֶּרומגנטי המחומם אל מעבר לנקודת קירי מאבד את תכונת המִגנוט העצמי, והופך לחומר פָּרָמגנטי לכל דבר.

<u>תווכים דיאמגנטיים</u>

• אלה כל החומרים שהאטומים שלהם חסרי מומנט מגנטי. מכל מקום, בהביאנו בחשבון שהאלקטרונים בכל אטום הם בבחינת סלילים אלמנטריים, הרי רק טבעי שבתגובה להפעלת שדה מגנטי חיצוני יושרו בהם זרמים כאלה שיוצרים שדה בכיוון נגדי לשדה החיצוני. במילים אחרות, השדה החיצוני משרה מומנט מגנטי בכיוון נגדי. זה מה שמצופה על-סמך חוק ההתמדה הכללי. להלכה האפקט הזה קיים גם בחומרים האחרים, אלא שהמומנט הנגדי המושרה תמיד זניח בהשוואה למומנט העצמי של האטום בתווכים פָּרָמגנטיים ופֶּרומגנטיים.

<u>סיכום – משוואות מקסוול</u>

- הבה נרשום לפנינו את ארבע משוואות היסוד של התורה האלקטרו-מגנטית, הלוא הן משוואות מקסוול. בין השאר אנו עושים זאת כאן משום שעיקר גדולתו של מקסוול בהקשר הזה היא התיקון שהנהיג במשוואת אמפר, שבו לא דנו עד כה. נתחיל אפוא לסכם את הידוע לנו ונדון במשוואות אחת אחת.

<u>משפט גאוס</u>: נרשום אפוא את המשפט, הוא הזהות

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad . \qquad (8.12)$$

או במילים, השטף החשמלי דרך משטח סגור שווה למטען הכלוא בתוכו חלקי הקבוע הדיאלקטרי של הריק. מובן מאליו כי Q הוא הסכום (האלגברי!) של כל המטענים בתוך המשטח הסגור.

<u>משפט השדה המגנטי</u>: העובדה היסודית המתייחסת לשדה המגנטי היא היותו חסר מקורות, לאמור

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad . \qquad (8.13)$$

הנה כי כן, השטף המגנטי דרך משטח סגור מתאפס זהותית, תמיד ובלי יוצא מן הכלל. קטבים מגנטיים בודדים אינם בנמצא.

<u>משפט פרדיי</u>: הלוא הוא חוק ההשראה, לאמור העִרבּוּל (נזכיר שזה המונח עבור האינטגרל הקווי של שדה וקטורי סביב לולאה, ז"א מסילה סגורה) של השדה החשמלי שווה למינוס שינוי השטף המגנטי דרך המסילה:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{x} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \quad . \qquad (8.14)$$

ליתר הבהרה נציין שכאן L היא המסילה הסגורה, ואילו S הוא משטח (כלשהו!) הפרוס על פני המסילה (ז"א שהמסילה היא שפת המשטח). נזכיר כי מגמת האינטגרציה הקווית מגדירה את הצד החיובי של המשטח. ועוד נזכיר שהשדה האלקטרו-סטטי הוא שדה משמר, שהערבול שלו מתאפס זהותית, ואילו כאן מדובר בשינוי השטף המגנטי, לאמור בשדה שאינו סטטי בעליל.

<u>משפט אמפר-מקסוול</u>: בזמנו דנו במשפט אמפר, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{x} = \mu_0 I$. כלומר, הערבול של השדה המגנטי שווה לקבוע μ_0 כפול בזרם הכולל דרך הלולאה שלאורכה מחשבים את הערבול. משפט זה, כפי שציינו, תקף רק עבור זרמים קבועים (בזמן!). מקסוול היה מודע למגבלה זאת, ותיקן את המשפט כך שיהיה נכון בכל תנאי, ללא מגבלות. הוא ניחש שלאגף הימני של משפט אמפר יש להוסיף עוד איבר (שהוא כינה בשם זרם ההעתקה, displacement current בלועזית), כך שהמשפט המתוקן, שאכן נקרא משפט אמפר-מקסוול, הוא

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{x} = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}\right) \quad . \qquad (8.15)$$

מובן מאליו כי L היא הלולאה שסביבה מחשבים את הערבול, ואילו S הוא משטח (כלשהו) הפרוש על פניה. פירושו של המשפט שלזרם I דרך הלולאה יש להוסיף את הנגזרת לפי הזמן של השטף החשמלי דרך הלולאה כפולה בקבוע הדיאלקטרי של הריק.

<u>גלים אלקטרו-מגנטיים מישוריים</u>

- במסגרת תורת החשמל הכללית שפיתח, הראה מקסוול שגלים אלקטרו-מגנטיים מתחייבים כמסקנה טבעית מארבע משוואות היסוד, שאינן אלא ניסוח מוצלח ונאה של חוקים המסכמים את ניסויי היסוד בחשמל ובמגנטיות. אנו נראה שמשתי משוואות הערבול אפשר לקבל משוואות גלים לשדה החשמלי ולשדה המגנטי. פתרון שתי משוואות הערבול בריק, בהעדר מטענים וזרמים, מראה שמהירות התפשטות הגלים האלקטרו-מגנטיים היא $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, לאמור מהירות האור! על סמך תוצאה זאת ניבא מקסוול שהאור הוא גל אלקטרו-מגנטי. נזכיר עוד שכעשרים שנה אחרי פִּרסום משוואות מקסוול הצליח הֶרץ לשדר ולקלוט גלים אלקטרו-מגנטיים.
- פתרון שתי משוואות מקסוול הנזכרות הוא מעבר לתוכנית הרצאתנו. מה שאפשר לעשות במקום זאת הוא להניח פתרון מסוים ולהראות שהוא מתיישב עם המשוואות. ואומנם, אם נניח שמדובר בגל מישורי בריק, בהעדר מטענים וזרמים, המתקדם בכיוון מסוים, נאמר בכיוון הציר x, שהשדה החשמלי E הוא בכיוון הציר y $\left(\vec{E}=E\vec{u}_y\right)$, ושהשדה המגנטי B בכיוון הציר z $\left(\vec{B}=B\vec{u}_z\right)$, או אז נקבל את הצורה הבאה לשתי משוואות הערבול:

$$\frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{\partial B}{\partial t}\ ,\ \ \frac{\partial B}{\partial x}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}\ . \tag{8.16}$$

<u>הוכחה</u> (למתעניינים): נדון במשוואת הערבול של השדה החשמלי. נבחר לולאה מלבנית צרה במישור (x,y) שצלעותיה מקבילות לצירי השיעורים. יהי רוחב הלולאה dx, וזוג הצלעות שזה אורכן מקבילות לציר x. ויהי אורך הצלעות המקבילות לציר y יחידה. מגמת האינטגרציה תיבחר באופן שהצד החיובי של הלולאה הוא בכיוון השדה המגנטי. אז הצירקולציה לאורך הלולאה היא

$$E(x+dx)-E(x)\approx\frac{\partial E}{\partial x}dx\ \ , \tag{8.17}$$

שכן ברור שהצלעות המקבילות לציר x אינן תורמות לצירקולציה. מצד שני, השטף המגנטי דרך הלולאה (ששיטחה dx) הוא פשוט Bdx. מכאן ברור שאכן התוצאה היא המשוואה הראשונה שרשמנו.

- באותו אופן ממש נגזרת צורת המשוואה השניה במקרה המיוחד של הגל המישורי שלנו, כאשר בוחרים את הלולאה לחישוב הערבול במישור (z,x).

- נחזור לשתי המשוואות שפיתחנו במקרה של הגל המישורי המסוים שבו אנו דנים. את המשוואה הראשונה, זאת שעניינה הערבול של השדה החשמלי, נגזור לפי x *ונוצל את המשוואה השנייה*:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad . \tag{8.18}$$

ובאותו אופן, אם נגזור את המשוואה השנייה לפי x וננצל את הראשונה, נמצא כי

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad . \tag{8.19}$$

- אנו רואים שגם השדה החשמלי וגם השדה המגנטי מקיימים את המשוואה הדיפרנציאלית (החלקית) מסדר שני

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad , \tag{8.20}$$

שפתרונה הכללי הוא צירוף של שתי הפונקציות

$$y(x,t) = f(x \pm \mathrm{v}t) \quad . \tag{8.21}$$

כאן f היא פונקציה כלשהי. כדי לברר מה טיבן של שתי הפונקציות הללו, הבה נעיין, למשל, בפונקציה $f(x-\mathrm{v}t)$. בזמן $t=0$ מדובר ב"פרופיל" מסוים, בפונקציה $f(x)$. אם נעיין היטב, לא יקשה להיווכח כי בזמנים השונים $t>0$ אותו פרופיל נע ימינה, ז"א בכיוון החיובי של הציר x, במהירות v. באותו אופן מתארת הפונקציה $f(x+\mathrm{v}t)$ תנועה של אותו פרופיל שמאלה. הנה כי כן מדובר בהגדרה של "גל": פרופיל נתון הנע ימינה (או שמאלה) במהירות v. והמשוואה הדיפרנציאלית החלקית מסדר שני אכן נקראת משוואת הגלים.

- משוואת הגלים מתארת גלים הנעים לאורך מיתר מתוח, וגם גלי קול הנעים בתוך חומרי. ועתה הראינו שגם גלים אלקטרו-מגנטיים מישוריים הנעים בריק מקיימים אותה.

<u>גלים הרמוניים (גלי סינוס)</u>

- נוח ומקובל לבחור בתור הפונקציה f דווקא את הפונקציה הטריגונומטרית סינוס (או קוסינוס). אולם הארגומנט של פונקציה זאת צריך להיות גודל חסר ממדים, בעצם זווית כלשהי ברָדינים. הנה כי כן, אנו מצפים שכאשר (עבור $t=0$) השיעור המרחבי שווה לאורך הגל, לאמור כאשר $x=\lambda$, יהיה הארגומנט של הפונקציה 2π. במילים אחרות

$$x-\mathrm{v}t \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}(x-\mathrm{v}t) = k\,x - \omega\,t \tag{8.22}$$

קיצורו של דבר, מכאן ואילך נטפל בגל האלקטרו-מגנטי המישורי

$$E = E_0 \cos(k\,x-\omega\,t)\ ,\quad B = B_0 \cos(k\,x-\omega\,t) \quad . \tag{8.23}$$

- ועוד נציין תכונה מעניינת של הגלים האלקטרו מגנטיים. נגזור את השדה החשמלי לפי x, ואת המגנטי לפי t:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_0 \sin(kx - \omega t) , \quad -\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_0 \sin(kx - \omega t) \quad . \tag{8.24}$$

הואיל ושני הביטויים שווים, אנו מוצאים כי

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu = c \quad . \tag{8.25}$$

בכל רגע ובכל מקום המנה של השדה החשמלי חלקי השדה המגנטי שווה למהירות האור!

- הבה נציין עוד כמה מאפיינים של גלים אלקטרו-מגנטיים, שהרי נושא הרצאתנו חשמל ואופטיקה, ואופטיקה אינה אלא תורת הגלים האלקטרו-מגנטיים. ובכן : -

<u>שימור האנרגיה בשדה האלקטרו-מגנטי ומשפט פוינטינג</u>

- חלוץ העיסוק בחוק שימור האנרגיה בשדה האלקטרו-מגנטי היה פוינטינג (Poynting). את התוצאות, שאותן בעיקר נצטט, פרסם בשנת 1884.
- ובכן, ההספק, לאמור העבודה המתבצעת על-ידי השדה בתחום מרחבי נתון ביחידת זמן, היא האינטגרל על-פני הנפח של $\vec{F} \cdot d\vec{x}/dt = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E}$. הכוח המגנטי הפועל על מטען נע ניצב לכיוון התנועה ועל כן אינו מבצע עבודה ואינו תורם אפוא להספק. אם התחום מבודד, או שמדובר במרחב כולו, אזי ההספק הזה הוא על חשבון האנרגיה של השדה $\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + B^2/\mu\right)$ האצורה בתחום. ומכאן אנו מסיקים שחוק שימור האנרגיה בשדה מתבטא במשוואה

$$\int \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\left(\varepsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu}\right) dV = 0 \quad . \tag{8.26}$$

- ואם אין התחום מבודד, הרי, כפי שהראה פוינטינג, מתקיים הקשר

$$\frac{d}{dt}\left(E_{mec} + E_{em}\right) = -\oint \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{S} \equiv -\oint \vec{S} \cdot d\vec{S} \quad . \tag{8.27}$$

קשר זה ידוע בתור משפט פוינטינג. המשפט קובע שהשינוי באנרגיה הכוללת האצורה בנפח נתון שווה למינוס השטף של הווקטור $\vec{S}$ דרך המשטח הכולא את התחום. $\vec{S}$ נקרא (איך לא?) הווקטור של פוינטינג, שאינו אלא זרם האנרגיה בשדה האלקטרו-מגנטי!

- נחזור לעיסוקנו בגל א"מ מישורי בריק. נזכיר כי $E/B = c$, וכי $\left|\vec{E} \times \vec{B}\right| = EB$. מכאן שהערך המוחלט של וקטור פוינטינג הצמוד לגל המישורי שלנו הוא

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c}{\mu_0}B^2 \quad . \tag{8.28}$$

אבל מה שמעניין יותר הוא הממוצע בזמן (על פני כמה מחזורים) של זרם האנרגיה. ממוצע זה ידוע בתור עוצמת הגל. כיוון שאנו דנים בגל הרמוני, והממוצע של קוסינוס בריבוע הוא $\frac{1}{2}$, הרי

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \quad . \tag{8.29}$$

- נחזור לצפיפויות האנרגיות, החשמלית והמגנטית, בשדה א"מ (בריק):

$$u_E = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \;\; , \;\; u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad . \tag{8.30}$$

משננצל את הקשר $B = E/c = E\sqrt{\varepsilon_0 \mu_o}$, יתברר כי

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}\varepsilon_0 \mu_0 E^2 = \ldots = u_E \quad , \tag{8.31}$$

לאמור, שבגל האלקטרו-מגנטי צפיפות האנרגיה המתייחסת לשדה החשמלי שווה לזאת המתייחסת לשדה המגנטי. במילים אחרות, האנרגיה מתחלקת שווה בשווה בין שני השדות:

$$u = u_E + u_B = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad . \tag{8.32}$$

אבל זאת צפיפות האנרגיה האלקטרו-מגנטית הכוללת <u>הרגעית</u>. צפיפות האנרגיה הממוצעת (בזמן) היא על כן

$$\langle u \rangle = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad . \tag{8.33}$$

וכאשר נשווה ביטוי זה להגדרת עוצמת הגל, נגלה כי

$$I = \langle S \rangle = \ldots = c \times \langle u \rangle \quad . \tag{8.34}$$

אנו מסיקים אפוא כי עוצמתו של גל אלקטרו-מגנטי שווה לצפיפות האנרגיה הממוצעת כפולה במהירות האור!

<u>תנע אלקטרו-מגנטי ולחץ קרינה</u>

- יחד עם האנרגיה גלים אלקטרו-מנטיים נושאים גם תנע. מכאן שגל הפוגע במשטח כלשהו מפעיל עליו לחץ. נניח שהגל הנדון מעביר למשטח שבו הוא פוגע אנרגיה כוללת U במשך פרק הזמן t. מקסוול הראה שאם המשטח בולע את כל האנרגיה הזאת, אזי התנע הכולל המועבר למשטח הוא

$$p = \frac{U}{c} \quad \ldots\ldots \text{ גוף שחור} \tag{8.35}$$

גוף שחור הוא הכינוי המקובל לבולע מושלם. לעומת זאת אם המשטח מחזיר את כל אנרגיית הגל הפוגעת בו, לאמור מדובר בהחזרה גמורה, אז – בדומה לידוע לנו מהמכניקה –התנע המועבר למשטח (בפגיעה ניצבת!) הוא

$$p = \frac{2U}{c} \quad \ldots\ldots \text{ החזרה גמורה} \tag{8.36}$$

- יתר על כן, יהי S *וקטור פוינטינג של הגל*. אז לחץ הקרינה על המשטח שבו פוגעת הקרינה הוא

$$P=\begin{cases} \dfrac{S}{c} & \text{....} \quad \textit{גוף שחור} \\ \dfrac{2S}{c} & \text{....} \quad \textit{החזרה גמורה} \end{cases} \tag{8.37}$$