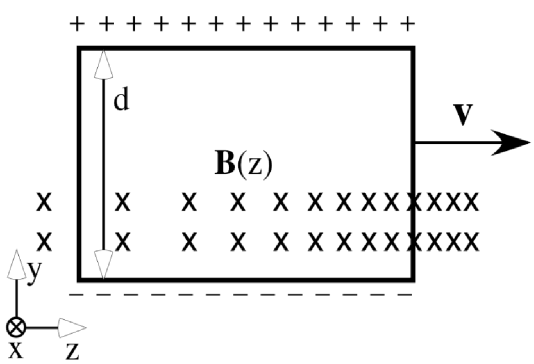
פרופ' יהודה ייבין וד"ר ניר שביב
מכון רקח לפיזיקה

חשמל ואופטיקה לתלמידי ביולוגיה. (תשס"ד).

<u>פרק שביעי</u>: השראה מגנטית ומשפט פרדיי

<u>חוק ההשראה של פרדיי</u>

- למדנו על הניסויים של אֶרסטד שהראו בעליל שזרם חשמלי משפיע על המחט המגנטית, או במילים אחרות: זרם חשמלי משרה שדה מגנטי. כעשור לאחר התגלית של ארסטד, בשנת 1831, גילה האנגלי פרדיי (Faraday) שאם משנים את השדה המגנטי בסביבת סליל, מושרה בו זרם. באותו זמן, ובאופן בלתי תלוי, גילה את התופעה גם האמריקני הנרי (Henry).
- בזמנו היו תגליות אלה מהפכניות, ובסופו של דבר הוליכו, בין השאר, לפיתוח תחנות הכוח החשמליות והמנועים החשמליים. אולם על-סמך ידיעותינו עד הנה ניווכח שהתופעה "מובנת מאליה." לשם זה נדון, קודם לכל, בתיל מוליך ישר <u>וסופי</u> הנע בשדה מגנטי אחיד הניצב לתיל במהירות הניצבת לתיל ולשדה כאחד. על כל אלקטרון חופשי בתיל פועל הכוח המגנטי $\vec{F}=-e\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}$. בתיל מושרה אפוא זרם, אולם כיוון שהתיל סופי מושג בו שיווי משקל, כאשר כוח המשיכה החשמלי בין מטעני הקיטוב מקזז את הכוח המגנטי.
- עתה נתאר לעצמנו שבשדה המגנטי האחיד נעה טבעת מלבנית מוליכה, כמתואר בתרשים. שוב יופיע בה קיטוב, ויושג מצב שיווי משקל. אולם מה קורה כאשר השדה המגנטי אינו אחיד? נניח שציר התנועה הוא הציר z, וכיוון השדה במגנטי (לתוך הדף) הוא הציר x. נאמר שהשדה משתנה בכיוון הציר z: $B=B_x=B(z)$. או אז על-פני הזרוע השמאלית של הטבעת, שמיקומה מאופיין על-ידי, נאמר, z_1, יושרֶה המתח $V_1=\mathrm{v}B(z_1)d$, ואם z_2 מציין את מיקום הזרוע הימנית של הטבעת, אז לאורכה $V_2=\mathrm{v}B(z_2)d$. בסך הכל יהיה המתח סביב הטבעת



$$V=V_1-V_2=\mathrm{v}(B_1-B_2)d \quad . \tag{7.1}$$

המתח הזה, המופיע סביב טבעת מוליכה הנעה בשדה מגנטי לא-אחיד, נודע בשם הנורא "כוח אלקטרו-מניע" (כא"מ). זהו מונח מחריד בעליל! למעשה לאורך הטבעת מושרה שדה חשמלי, והמתח סביבה הוא

$$V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{x} \quad . \tag{7.2}$$

• מהבעייה הפרטית שבה אנו דנים אנו רוצים להסיק חוק כללי שעניינו המתח המושרה במעגל מוליך הנע בשדה מגנטי לא-אחיד. נעיין אפוא במצב מנקודת ההשקפה של צופה במערכת הייחוס העצמית של המלבן המוליך. מבחינתו של צופה זה המלבן אינו נע, כמובן, והוא מבחין שהשדה המגנטי משתנה. מה שמעניין הוא שהשטף המגנטי דרך המלבן משתנה. ואומנם, אם נחזור למערכת המעבדה, נמצא כי בפרק הזמן dt השינוי בשטף דרך המלבן הוא

$$d\Phi = B_2\left(d \cdot \mathrm{v}dt\right) - B_1\left(d \cdot \mathrm{v}dt\right) = -\mathrm{v}\left(B_1 - B_2\right)d \cdot dt \quad . \tag{7.3}$$

מכאן אנו מסיקים כי, לפחות במקרה המלבן שבו אנו דנים,

$$V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad . \tag{7.4}$$

הקשר הזה, הקשר בין המתח סביב המעגל המוליך לבין שינוי השטף המגנטי דרכו, ידוע בתור חוק ההשראה של פרדיי. מגמת האינטגרציה הקווית להגדרת הצד החיובי של המשטח שעל-פניו מתבצעת האינטגרציה המשטחית הם עניינים שכבר דשנו בהם, ואינם מהווים כל בעייה. בהקשר זה ראוי לציין שסימן המינוס המופיע החוק ההשראה יש לו גם משמעות "פילוסופית," הואיל והוא מדגים את מה שנודע בתור עקרון ההתמדה הכללי, או העיקרון של לֶה-שָטֶליֶה. לפי עיקרון זה שואפת כל מערכת חומרית להתמיד במצבה. ובעניין שבו אנו דנים, הרי משמשתנה השטף המגנטי דרך הלולאה, התגובה היא לנסות לשמור על השטף דרכה. ואומנם, הזרם המושרה בלולאה הוא עצמו משרה שדה מגנטי, המעלה או מוריד את השטף דרך הלולאה, לפי העניין.

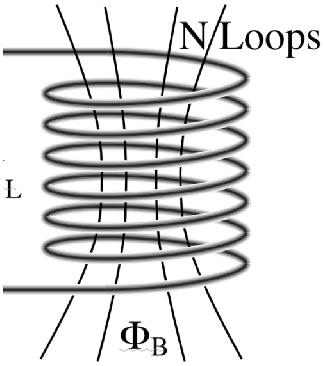
• לסיכום הדיון הנוכחי נזכיר שבזמנו קבענו והדגשנו שהשדה האלקטרו-סטטי משמר, ועל כן עִרבּול השדה, או הצירקולציה שלו, לאמור האינטגרל הקווי של השדה סביב מסילה סגורה, מתאפס. אנו יכולים עתה להעריך את חוק ההשראה של פרדיי כהכללה למקרה של מערכות משתנות בזמן, שאינן סטטיות, שאז השדה החשמלי אינו משמר. אנו קובעים אפוא שהערבול של שדה חשמלי שאיננו סטטי, אלא שדה המשתנה בזמן, אינו חייב להתאפס.

<u>השראוּת עצמית</u>

• נדון במעגל הכולל מתג, נגד ומקור מתח. ברגע שהמתג נסגר אין הזרם קופץ מאפס לערכו המירבי V/R, משום שחוק ההשראה שבו דנו עד הנה מונע זאת. למעשה מרגע שמתחיל לזרום במעגל זרם, הוא משרה שדה מגנטי דרך הלולאה המוליכה. הזרם עולה בהדרגה, ואיתו עולה השדה המגנטי. על-פי חוק ההשראה השטף המגנטי המשתנה דרך המעגל משרה בו זרם המתנגד לשינוי, ובמילים אחרות מופיע במעגל מתח נגדי למתח המקור הנתון. בסופו של דבר הזרם במעגל אכן עולה מאפס לערכו הסופי הנזכר בהדרגה. התופעה הזאת נקראת השראוּת עצמית (של המעגל הנדון).

• כדי לקבל קשר כמותי שיתאר את ההשראוּת העצמית, נזכיר כי, לפי חוק ההשראה של פרדיי, המתח המושרה סביב לולאה שווה למינוס הנגזרת לפי הזמן של השטף המגנטי דרכה. השטף המגנטי מתכונתי לעוצמת השדה המגנטי, שהיא עצמה מתכונתית לזרם בלולאה. מכאן שמתח

ההשראות העצמית מתכונתי תמיד לנגזרת לפי הזמן של הזרם. בתור דוגמה נדון בסליל "צפוף" בעל N כריכות. עבור סליל כזה



$$V_L = -N\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad . \tag{7.5}$$

כאן L הוא מקדם המתכונת שבו דיברנו, והוא מכונה ההשראות (העצמית) של הסליל. ומהקשר שרשמנו מתברר שההשראות של סליל בעל N כריכות היא

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad . \tag{7.6}$$

מכל מקום, כשם שהתנגדות היא מדד להתנגדות לזרם, כך ההשראות היא מדד להתנגדות לשינוי בזרם.

- אשר ליחידת ההשראות, הנקראת הֶנרי, הרי מהקשר שכבר רשמנו

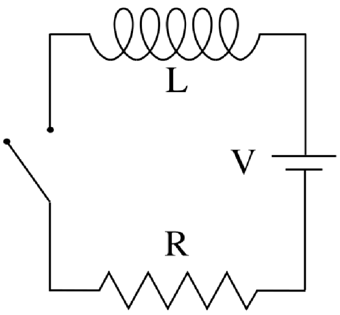
$$L = -\frac{V_L}{dI/dt} \quad \Rightarrow \quad henry = \frac{volt \cdot sec}{ampere} \quad . \tag{7.7}$$

<u>ההשראות של סליל "אינסופי"</u>

- ההשראות של הֶתקן כלשהו תלויה בגיאומטריה שלו, וחישובה עלול להיות קשה מאוד עבור גיאומטריות מסובכות. אולם עבור התקנים פשוטים (מבחינת הגיאומטריה) החישוב מיידי וקל. למשל, עבור סליל צפוף שאורכו גדול דיו בהשוואה לקוטר החתך שלו, לאמור מה שאנו מכנים סליל אינסופי: בקירוב התָקף לסליל כזה השדה המגנטי בתוכו אחיד וערכו $B = \mu_0 nI$. כאן n היא צפיפות הכריכות, מספרן ליחידת אורך. השטף המגנטי דרך כל כריכה הוא, כמובן, $\Phi_1 = BA = \mu_0 nIA$. ולבסוף, אם ℓ הוא אורך הסליל, אז השראות הסליל היא

$$L = \frac{n\ell\Phi_1}{I} = \mu_0 n^2 A\ell = \mu_0 n^2 \times \left(\text{נפח הסליל}\right) \quad . \tag{7.8}$$

<u>מעגלי נגד-סליל (RL)</u>



- נדון במעגל טורי הכולל סוללה (מקור מתח), שהמתח על פניה V, נַגד שהתנגדותו R, סליל שהשראותו העצמית L, ומתג. נאמר שהמתג נסגר בזמן $t = 0$. הזרם מתחיל לעלות, ומשום כך מופיע על-פני הסליל מתח נגדי $V_L = -L \cdot dI/dt$. כיוון שהזרם עולה, נגזרתו לפי הזמן חיובית והמתח V_L אכן שלילי. קיצורו של דבר, משוואת קירכהוף סביב הלולאה שלנו קובעת כי

$$V - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad , \tag{7.9}$$

כדי לפתור משוואה זאת, נעבור למשתנה $x = (V/R) - I$, ואז $dx = -dI$. המשוואה באמצעות x תופיע בצורה

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0 \quad , \tag{7.10}$$

ומכאן

$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt \quad \Rightarrow \quad \ell n\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}t \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^{-(R/L)t} \quad . \tag{7.11}$$

הואיל ובזמן $t = 0$ הזרם הוא $I = 0$, מתברר כי $x_0 = V/R$. הפתרון באמצעות x הוא בעצם

$$\frac{V}{R} - I = \frac{V}{R}e^{-(R/L)t} \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) \quad . \tag{7.12}$$

את הזרם כפונקציה של הזמן אפשר לבטא גם בתור

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad , \tag{7.13}$$

מקום אשר $\tau = L/R$ הוא קבוע הזמן המאפיין את מעגל ה-RL שבו אנו דנים. המשמעות של τ היא שזה הזמן הנדרש לזרם כדי להגיע (מאפס) לחלק $1 - e^{-1} = 0.632$ מערכו הסופי V/R.

<u>האנרגיה האצורה בשדה מגנטי</u>

- הואיל וסליל, כמו במעגל שבו דנו זה עתה, יוצר מתח נגדי ו"מפריע" לסוללה להפיק מייד את הזרם הצפוי, על הסוללה לעבוד כדי לייצר את הזרם. חלק מהאנרגיה שמשקיעה הסוללה מיועד לחימום הנגד, והחלק האחר ייאצר בסליל. דבר זה יתברר על נקלה אם נכפול את המשוואה $V - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$ בזרם I, ונקבל את הקשר

$$VI = RI^2 + LI\frac{dI}{dt} \quad . \tag{7.14}$$

לא קשה להשתכנע כי VI הוא ההספק של הסוללה! ומתברר כי הוא מושקע בנגד בשיעור RI^2, וכי היתרה אצורה בסליל. אם נציין את האנרגיה המגנטית האצורה בסליל בתור U, אזי

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \quad , \tag{7.15}$$

ומכאן שהאנרגיה המגנטית הכוללת האצורה בסליל היא

$$U = \int_0^U dU = \int_0^I LIdI = ½\, LI^2 \quad . \tag{7.16}$$

בזמנו ראינו כי האנרגיה החשמלית האצורה בקבל היא $½\ Q^2/C$. הנוסחה לאנרגיה המגנטית בסליל דומה למדי. מכל מקום חשוב להבין כי ליצירת שדה מגנטי נדרשת אנרגיה.

<u>צפיפות האנרגיה בשדה המגנטי</u>

- בזמנו ראינו שצפיפות האנרגיה בשדה החשמלי היא $½\,\varepsilon_0 E^2$. אפשר אפוא לצפות לנוסחה דומה לצפיפות האנרגיה בשדה המגנטי. הניחוש הטבעי יהיה $½\ B^2/\mu_0$. ואומנם, נדון בסליל

(אינסופי): עוצמת השדה המגנטי בו היא $B=\mu_0 nI$, ומכאן $I=B/\mu_0 n$. ההשראות של הסליל היא $L=\mu_0 n^2 A\ell$. ואילו את האנרגיה האצורה בסליל הערכנו זה עתה. באמצעות ההצגות המתאימות אנו מוצאים אפוא כי

$$U=\tfrac{1}{2}LI^2=\tfrac{1}{2}\mu_0 n^2\left(A\ell\right)\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2=\frac{B^2}{2\mu_0}\left(A\ell\right)\quad , \tag{7.17}$$

ומכיוון שהמכפלה $A\ell$ היא נפח הסליל, ברור שכמצופה צפיפות האנרגיה המגנטית היא אכן

$$u=\frac{B^2}{2\mu_0}\quad . \tag{7.18}$$

<u>השראות הדדית</u>

- נתאר לעצמנו שני סלילים שאינם רחוקים מדי האחד מהשני. זרם באחד מהם יוצר שדה מגנטי ועל כן גם שטף מגנטי דרך הסליל השני. ואם הזרם I_1 בסליל הראשון משתנה, גם השטף דרך הסליל השני משתנה, ומשרה סביבו מתח V_2 שברור שהוא מתכונתי לנגזרת לפי הזמן של I_1:

$$V_2=-N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt}=-M_{21}\frac{dI_1}{dt}\quad .$$

המקדם M_{21} נקרא ההשראות ההדדית של הסליל השני ביחס לראשון. באותו אופן ברור כי

$$V_1=-M_{12}\frac{dI_2}{dt}\quad . \tag{7.19}$$

בניסויים נמצא כי אם $dI_1/dt=dI_2/dt$, אז תמיד $V_1=V_2$. פירוש הדבר כי $M_{12}=M_{21}=M$. המקדם M הוא ההשראות ההדדית המתייחסת לשני הסלילים המסוימים ובאופן כללי לכל שני מעגלים מתייחסת השראות הדדית.

- הבה נעריך את ההשראות ההדדית של שני סלילים הכרוכים סביב אותה מסגרת גלילית. במילים אחרות לשניהם אותו חתך A (והחתכים חופפים), ונאמר שהם גם בעלי אותו אורך, ℓ. כל סליל מאופיין באמצעות צפיפות הכריכות שלו. אם בסליל האחד, הראשון, הזרם הוא I_1, אזי עוצמת השדה המגנטי בתוכו היא $B=\mu_0 n_1 I_1$. מהקשר הראשון שרשמנו בפסקה הקודמת,

$$V_2=-N_2\frac{d\Phi_{21}}{dt}=-M_{21}\frac{dI_1}{dt}\quad , \tag{7.20}$$

אנו מסיקים כי

$$M=\frac{n_2\ell\Phi_{21}}{I_1}=\mu_0 n_1 n_2\left(A\ell\right)\quad . \tag{7.21}$$

<u>מעגלי סליל קבל (LC)</u>

- נתאר לעצמנו מעגל שבו קבועים בטור קבל, סליל ומתג. המתג פתוח והקבל נטען עד שמטענו מגיע לכדי Q_0. ברגע $t=0$ סוגרים את המתג, והקבל מתחיל להתפרק דרך הסליל. המטען בקבל פוחת, ולעומתו נבנה בסליל שדה מגנטי (בזכות הזרם שמתחיל לזרום בו). לצורך הדיון במעגל הזה אנו מניחים שההתנגדות של המעגל זניחה, לאמור היא אפס למעשה. נוח יהיה לנתח את המתרחש במעגל משיקולי אנרגיה.
- לפני סגירת המעגל, האנרגיה האצורה בקבל היא $U=Q_0^2/2C$. עם הסגירה מתחיל הקבל להתפרק, והזרם דרך הסליל גדל והולך. זאת אומרת שהאנרגיה בקבל פוחתת, ולעומת זאת מצטברת אנרגיה בשדה המגנטי הנוצר בסליל. בזמן כלשהו t אחרי סגירת המעגל, המטען בקבל הוא Q והזרם דרך הסליל הוא I. מטעמי שימור האנרגיה ברור כי אז

$$U=\frac{Q^2}{2C}+\tfrac{1}{2}LI^2 \quad . \tag{7.22}$$

הואיל ובוודאי $dU/dt=0$, אנו מסיקים כי

$$\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt}+LI\frac{dI}{dt}=0 \quad . \tag{7.23}$$

כדי לקבל מכאן משוואה דיפרנציאלית במשתנה אחד, ננצל את ההגדרה $I=dQ/dt$, ואת המתחייב ממנה $dI/dt=d^2Q/dt^2$. עם הצגת שני הקשרים הללו במשוואה האחרונה מקבלים

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{C}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Q}{dt^2}=-\frac{1}{LC}Q \quad . \tag{7.24}$$

ואנו נתקלנו כבר במשוואה כזאת, ויודעים שפתרונה הכללי הוא

$$Q(t)=Q_0\cos(\omega t+\varphi) \quad .$$

מאליו יובן כי $\omega=1/\sqrt{LC}$. וכמובן, כל פתרון פרטי מתאפיין על-ידי שני קבועים, הנקבעים במקרה שלנו על-ידי תנאי ההתחלה. הואיל ומטען הקבל משתנה הרמונית, גם הזרם דרך הסליל משתנה כך, ואומנם משנגזור את הביטוי למטען (לפי הזמן) נמצא כי

$$I=\frac{dQ}{dt}=-\omega Q_0\sin(\omega t+\varphi) \quad . \tag{7.25}$$

תנאי ההתחלה שלנו מתבטאים בדרישה שבזמן $t=0$ גם $Q=Q_0$ וגם $I=0$. על כן

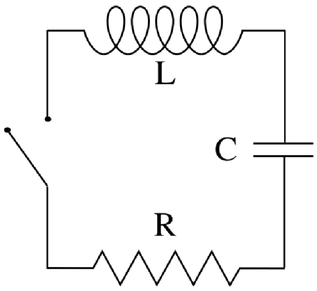
$$I(0)=-\omega Q_0\sin\varphi=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi=0 \quad . \tag{7.26}$$

וקביעה זאת מתיישבת כמובן עם $Q(0)=Q_0$. ועוד נוכל לרשום לפנינו כי הערך המירבי של הזרם הוא $I_0=\omega Q_0$, וכי אפשר לבטא את הזרם בתור

$$I(t)=-I_0\sin\omega t \quad . \tag{7.27}$$

אפשר עוד לברבר כהנה וכהנה על המעגל המתנודד שלנו, אך הדברים, רובם ככולם, מובנים מאליהם. נאמר רק זאת: בהנחה שלנו, שאת ההתנגדות ה"אוהמית" במעגל אפשר להזניח, מתברר שהמעגל יתנודד הרמונית לנצח. אבל מובן שעם התנגדות סופית כלשהי (וזאת קיימת תמיד) נקבל תנודות מרוסנות שתימשכנה על שכל האנרגיה האצורה בקבל בזמן $t=0$ תתגלגל כחום במעגל. ועוד נעיר שאפילו במצב האידיאלי של מעגל LC חסר התנגדות הרי המעגל מאבד אנרגיה המתגלגלת בקרינה אלקטרו-מגנטית שהמעגל מקרין.

<u>מעגלי נגד-סליל-קבל (RLC)</u>



- למעגל סליל-קבל שבו דנו זה עתה נוסיף נגד. שלושת האלמנטים וגם המתג כולם מחוברים בטור. הקבל נטען ומטענו לפני סגירת המתג הוא Q_0.

הפעם עם סגירת המתג אין האנרגיה נשמרת, אלא מתבזבזת בשיעור RI^2. לאמור

$$\frac{dU}{dt}=-RI^2 \quad . \tag{7.28}$$

נחזור למשוואה $dU/dt=0$ בדיון הקודם ונתקן אותה בהתאם למצב בבעייה הנוכחית:

$$LI\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt}=-RI^2 \quad . \tag{7.29}$$

שוב נציג $dQ/dt=I$, $dI/dt=d^2Q/dt^2$, ונחלק את המשוואה ב-I. או אז נקבל

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0 \quad . \tag{7.30}$$

- איך פותרים משוואות דיפרנציאליות כאלה, לאמור ליניאריות, הומוגניות, מסדר שני?

אף שבכמה וכמה ספרים "אלמנטריים" מדלגים על דרך הפתרון ופשוט רושמים אותו, העניין אינו לא מסובך, ולא כה מסורבל. אם כן, הבה נטפל במשוואה הטיפוסית

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+cx=0 \quad .$$

"ננחש" את הפתרון $x(t)=e^{\alpha t}$. משנציג את הפתרון הזה במשוואה, ונצמצם את הגורם המשותף לכל האיברים, לאמור את $x(t)$ עצמה, תתקבל משוואה ריבועית עבור מקדם המעריך α:

$$\alpha^2+2b\alpha+c=0 \quad . \tag{7.31}$$

שני הערכים של α הפותרים את המשוואה הריבועית הם כמובן

$$\alpha=-b\pm\sqrt{b^2-c} \quad . \tag{7.32}$$

נקדים ונעיר כאן שאם $b^2<c$, אז (!)

$$\alpha=-b\pm i\sqrt{c-b^2}=-b\pm i\omega \quad .\ .\ .\ . \quad b^2<c,\ \ \omega^2>0 \quad . \tag{7.33}$$

במקרים כאלה אנו מוצאים שהפתרון הוא e^{-bt} כפול בצירוף כלשהו של $exp[i\omega t]$ ושל $exp[-i\omega t]$, או בצורה אחרת צירוף של $cos\,\omega t$ ושל $sin\,\omega t$, או בצורה נוספת e^{-bt} כפול בפונקציה $cos(\omega t+\varphi)$. נוח לבחור דווקא בצורת הפתרון האחרונה, לאמור לרשום את הפתרון של המשוואה הליניארית הומוגנית מסדר שני בתור

$$x(t)=Ae^{-b}\cos(\omega t+\varphi) \tag{7.34}$$

אנו יכולים אפוא לרשום את הפתרון הכללי של משוואת המעגל שבו אנו דנים בתור

$$Q(t)=Q_0e^{-(R/2L)t}\cos(\omega t+\varphi)\quad ....\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\quad . \tag{7.35}$$

בתנאי ההתחלה "שלנו" (בזמן $t=0$: $Q=Q_{max}=Q_o$, $I=0$) נציין כי $\varphi=0$. קיצורו של דבר, זה אומר הכל באשר למעגל המתנודד בין קבל טעון לבין סליל האוצר שדה מגנטי. מדובר בתנועה הרמונית, שבגלל נוכחות הנגד שבו מתבזבזת אנרגיה, התנודה מרוסנת.

- אולם נזכור שעד עתה עסקנו בהתנגדות קטנה יחסית: $R<2\sqrt{L/C}$. אם מעלים את ההתנגדות בהדרגה, התדירות יורדת, ובכל מחזור מתרסן מטען הקבל המירבי יותר ויותר. וכאשר מגיעה ההתנגדות לערך הקריטי $R_c=2\sqrt{L/C}$, נפסקת התנודה כליל, והמטען דועך עם הזמן אקספוננציאלית לפי $exp[-(R/2L)t]$. ואם $R>R_c$, מדובר על ריסון יתר, ודעיכת המטען, $e^{-t/\tau}$, מאופיינת על-ידי קבוע הזמן

$$\tau=\left(\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}\right)^{-1}\approx\left(\frac{R}{L}-\frac{1}{CR}\right)^{-1}\quad . \tag{7.36}$$

אנו רואים שקבוע הזמן בריסון הקריטי הוא $2L/R$, ועם עליית ההתנגדות מתקצר קבוע הזמן והולך, ולבסוף הוא שואף לאפס כמו L/R.

<u>מעגלי זרם חילופין</u>

- בסעיף זה אנו עומדים לדון במעגלים טוריים הכוללים אלמנטים, המוכרים לנו כבר, לאמור נגדים, קבלים וסלילים, שבהם מקור המתח הנתון מפיק מתח המשתנה הרמונית, מתח סינוסואידלי. הזרם דרך כל אלמנט מתכונתי למתח הרגעי על פניו, ונמצא שכל הזרמים גם הם הרמוניים, אבל לאו דווקא באותה פזה של מקור המתח. מכל מקום, הבעיות שבהן נדון מסתכמות בשאלה: נתון מקור זרם חילופין המחובר במעגל טורי לנגדים, קבלים וסלילים. משנתונה האמפליטודה של המתח ותדירותו, וכן כל הערכים R, C ו-L של האלמנטים במעגל, יש למצוא את האמפליטודה והפזה של הזרם דרך כל אלמנט. אם לא צוין הדבר, עוד יתברר שכל הזרמים המבוקשים הם זרמי חילופין

הרמוניים בתדירות מקור המתח. וכדי לוודא שהמונחים תדירות ν, מחזור T, ותדירות זוויתית ω ידועים ומובנים נרשום לפנינו את הקשרים המגדירים אותם:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad . \tag{7.37}$$

<u>נגדים במעגל זרם חילופין</u>

- במעגל הכולל מקור מתח, הנוהג לפי $V = V_0 \sin\omega t$, ונגד מאופיין על-ידי R, ברור (מחוקי קירכהוף ...) כי בכל זמן שהוא המתח על-פני הנגד שווה למתח שמפיק המקור. על כן הזרם דרך הנגד הוא

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R}\sin\omega t = I_0 \sin\omega t \quad . \tag{7.38}$$

דרך אגב נעיר שהזרם הממוצע מתאפס כמובן, שכן $\langle \sin\omega t\rangle = 0$. אולם לעומת זאת ההספק של הנגד, האנרגיה ה"מתבזבזת," המושקעת בחימומו, היא סופית (גם בזרם חילופין!). כיוון שההספק הזה הוא

$$P = RI^2 \quad \Rightarrow \quad \langle P\rangle = R\langle I^2\rangle = RI_0^2\langle \sin^2\omega t\rangle = \tfrac{1}{2}RI_0^2 \quad . \tag{7.39}$$

פירוש הדבר שמבחינת האנרגיה המושקעת בנגד ישנו זרם ממוצע, או טוב יותר זרם אפקטיבי, היכול לשמש בנוסחת ההספק, והוא

$$I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad . \tag{7.40}$$

הציון rms מציין root mean square., לאמור השורש של ממוצע הריבוע (ובתור חידוד נוכל לנצל את אותן ראשי התיבות בעברית, ובתנאי שנקרא אותן מימין לשמאל: שמ"ר.)

<u>סלילים במעגלי זרם חילופין</u>

- נדון עתה במעגל הכולל מקור מתח חילופין, $V(t) = V_0 \sin\omega t$, המחובר לסליל המאופיין על-ידי ההשראות L. המתח המושרה על-פני הסליל הוא $-L\,dI/dt$. על כן

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_0}{L}\sin\omega t \quad . \tag{7.41}$$

אינטגרציה מיידית מלמדת כי

$$I(t) = \frac{V_0}{L}\int \sin\omega t\,dt = -\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t \quad . \tag{7.42}$$

אולם לענייננו מוטב לנצל עוד את הזהות הטריגונומטרית

$$\cos\omega t = -\sin\left(\omega t - \tfrac{1}{2}\pi\right) \quad . \tag{7.43}$$

אנו מסיקים אפוא כי

$$I(t)=I_0\,sin\left(\omega t-\tfrac{1}{2}\pi\right)=\frac{V_0}{\omega L}\,sin\left(\omega t-\tfrac{1}{2}\pi\right)\quad . \tag{7.44}$$

הנה כי כן, כאשר מפעילים על סליל מתח חילופין הרמוני, הזרם בסליל תמיד מפגר ביחס למתח המופעל על פניו ב-90°. פירוש הדבר שכאשר המתח מתאפס, ערכו המוחלט של הזרם הוא I_0. ליתר דיוק אנו קובעים שכאשר המתח מתאפס ועולה, הזרם הוא $-I_0$, וכאשר המתח מתאפס ויורד אז $I=I_0$. במילים אחרות המתח על פני הסליל מקדים את הזרם דרכו ב-90°. זאת אומרת, כאשר הזרם מתאפס ועולה המתח הוא V_0, וכאשר הזרם מתאפס ויורד אז $V=-V_0$.

- נחזור למשוואה האחרונה. רואים שהמשרעת של הזרם היא $I_0=V_0/\omega L$. זה מזכיר כמובן את חוק אוהם עם ה"התנגדות" $X_L=\omega L$. הגודל הזה שממדו הוא אכן אוהם, אינו ממש התנגדות. הוא תלוי לא רק באפיון הסליל, אלא גם בתדירות. מדברים על העַכָּבָה ההשראותית (של הסליל). ועוד נראה עד כמה גודל זה, וגודל דומה המתייחס לקבל, נוחים מאד כדי לטפל במעגלי זרמי חילופין כלליים.

<u>קבלים במעגלי זרם חילופין</u>

- אנו כבר יודעים איך לטפל בקבל, שקיבולו C המחובר למקור מתח חילופין הרמוני בעל אמפליטודה V_0 ותדירות זוויתית ω. המתח על-פני הקבל הוא

$$V(t)=\frac{Q(t)}{C}=V_0\,sin\,\omega t\quad . \tag{7.45}$$

מכאן שהזרם במעגל הוא

$$I(t)=\frac{dQ}{dt}=\omega C V_0\,cos\,\omega t\quad . \tag{7.46}$$

ושוב, אך הפעם על-פי $cos\,\omega t=sin\left(\omega t+\tfrac{1}{2}\pi\right)$, מתברר כי

$$I(t)=I_0\,sin\left(\omega t+\tfrac{1}{2}\pi\right)=\frac{V_0}{X_C}\,sin\left(\omega t+\tfrac{1}{2}\pi\right)=\omega C V_0\,sin\left(\omega t+\tfrac{1}{2}\pi\right)\quad . \tag{7.47}$$

וכפי שאפשר לנחש $X_c=1/\omega C$ נקראת העכבה המתייחסת לקבל. אך בעיקר חשובה העובדה שהזרם במעגל מקדים את המתח המופעל על הקבל ב-90°.

<u>נגד-סליל-קבל בטור במעגל זרם חילופין</u>

- אנו דנים עתה במעגל הכולל מקור מתח חילופין, נגד, סליל וקבל המחוברים בטור. נוח להניח שמתח החילופין המופעל במעגל הוא

$$V=V_0\,sin\,\omega t\quad . \tag{7.48}$$

הואיל והמעגל טורי צריך להיות ברור שהזרם בכל מקום במעגל הוא אותו זרם בדיוק, שאותו אנו רוצים לבטא בתור

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad , \tag{7.49}$$

והבעייה העומדת בפנינו היא לקבוע את ערכי משרעת הזרם I_0 והפזה φ, שבה הזרם מפגר אחרי המתח.

- על סמך ניתוחינו הקודמים, והקביעה שהזרם אחד הוא במעגל, המתחים על פני שלושת האלמנטים נוהגים לפי האופי של כל אלמנט. קודם כל המתח על פני הנגד הוא בפזה עם המתח של המקור, לאמור

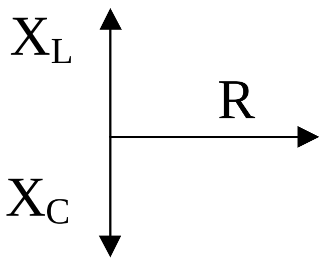
$$V_R(t) = RI_0 \sin \omega t = V_{R0} \sin \omega t \quad . \tag{7.50}$$

שנית, על-פני הסליל, כפי שראינו, המתח מקדים את הזרם ב-90°. על כן

$$V_L(t) = X_L I_o \sin\left(\omega t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = V_{L0} \cos \omega t \quad . \tag{7.51}$$

ולבסוף, כאמור, על-פני הקבל המתח מפגר לגבי הזרם ב-90°, ומכאן

$$V_C(t) = X_C I_0 \sin\left(\omega t - \tfrac{1}{2}\pi\right) = -V_{C0} \cos \omega t \quad . \tag{7.52}$$



- עתה נציין שמובן מאליו כי $V = V_R + V_L + V_C$. כדי לתאר גודל המשתנה עם הזמן כמו $A \cos \omega t$ נוח מאוד לתאר במישור (x,y) את הקטע A שקצהו השמאלי מתלכד עם הראשית והימני על הציר x. אם נסובב עתה את הקטע הזה (סביב הראשית) במהירות הזוויתית ω אז ההטלה של הקטע על הציר x בכל רגע מתארת את $A \cos \omega t$. במקרה שלנו, לאמור המתח V, כשהגודל המבוקש הוא סכום של שלושה מחוברים בעלי פזות שונות, אנו מתארים את V_R לאורך הציר x, את V_L, המקדים את V_R ב-90°, לאורך הציר y במגמה החיובית, ואת V_C, המפגר לעומת V_R ב-90°, לאורך הציר y במגמה השלילית. התצורה הזאת מסתובבת סביב הראשית במהירות הזוויתית ω, והמתח הכולל הוא סכום ההטלות של שלושת ה"קטעים" על הציר x. אפשר כמובן לדון ב"קטע" שהוא הסכום הווקטורי של שלושת הקטעים ובהטלה שלו. אבל כל קטע המייצג מתח שווה לעכבה המתאימה כפולה בזרם המתאים. את העכבה המתאימה לזרם הכולל נהוג לציין בתור Z. לאמור

$$V = ZI \quad . \tag{7.53}$$

אבל הואיל ובכל שלושת המחוברים המהווים את הזרם הכולל מופיע אותו I_0, גם התנגדות הנגד, עכבת הסליל ועכבת הקבל מקיימות את התצורה של המתחים בדיאגרמה הקוטבית. במילים אחרות, מוצדק להסיק כי

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} \quad . \tag{7.54}$$

- הנה כי כן, בעייתנו פתורה שכן אמפליטודת הזרם הינה

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} \quad , \tag{7.55}$$

ואילו הפזה המבוקשת, φ, כפי שלא קשה להיווכח, מתקבלת מהקשר הגיאומטרי

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad . \tag{7.56}$$

נעיר עוד שאם $X_L > X_C$, הפזה חיובית שאז הזרם מפגר לעומת המתח המופעל על המעגל. זה קורה כמובן בתדירויות גבוהות. ואילו אם $X_L < X_C$, אז הזרם מקדים את המתח.

<u>תהודה במעגלי נגד-סליל-קבל טוריים</u>

- נחזור למעגל שבו דנו בהרחבה זה עתה. במיוחד נתעניין בתלות של הזרם המושרה בו בתדירות מקור מתח החילופין. נזכיר כי

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 - \left(X_L - X_C\right)^2}} \quad . \tag{7.57}$$

רואים מייד ששיא הזרם (עבור ערך נתון של V_0) מתקבל כאשר

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad . \tag{7.58}$$

נציין כי ערך זה של התדירות הוא מה שקראנו התדירות העצמית של מעגל LC. אבל בהקשר הנוכחי הוא ידוע כתדירות התהודה של מעגל ה-RCL הטורי. יתר על כן, כאשר על המעגל מופעל מתח חילופין בתדירות התהודה של המעגל, אז $I_0 = V_0/R$, והזרם המושרה במעגל הוא בפזה עם מתח החילופין.

<u>השנאי וקווי המתח הגבוה</u>

- כדי להעביר חשמל למרחקים גדולים, חיוני לדאוג לזרם חלש ככל האפשר כדי למזער את בזבוז החשמל בחימום קווי ההולכה, לאמור למזער את RI^2. מצד שני, הצרכנים זקוקים למקור במתח נמוך – מטעמי בטיחות – וזרם חזק –כדי להפעיל את מכשירי החשמל הביתיים, וכמובן את המתקנים התעשייתיים. לשם זה אנו זקוקים למערכת חשמלית המשנה את המתח ועוצמת הזרם כאחת, לשנאי (טרנספורמטור בלע"ז).
- נדון בשני סלילים הכרוכים סביב אותה ליבת ברזל. האחד, בעל N_1 כריכות, מחובר למקור מתח חילופין, ונקרא הסליל הראשוני; והשני, בעל N_2 כריכות, מחובר למה שנקרא נֵגֶד עומס. תפקיד ליבת הברזל המשותפת להגדיל את השטף המגנטי דרך הסלילים, ולהבטיח שמרבית השטף דרך אחד הסלילים יעבור גם דרך השני. התנגדות הסלילים זניחה בדרך כלל, ואנו נניח שאנו דנים בשנאים אידיאליים, ללא התנגדות אוהמית.
- אם המעגל המשני מנותק, הרי המעגל הראשוני הוא פשוט מעגל מקור-מתח-חילופין וסליל. לפי חוק ההשראה המתח המושרה על-פני הסליל הוא $V_1 = -N_1\, d\Phi/dt$, בהנחה שמדובר בשנאי

אידיאלי, לאמור שהשדה המגנטי דרך שני הסלילים חד הוא, הרי על-פני הסליל השני מושרה המתח $V_2 = -N_2\, d\Phi/dt$, והואיל והגורם $d\Phi/dt$ משותף לשתי המשוואות האחרונות, אנו מוצאים כי

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \quad . \tag{7.59}$$

הנה כי כן, ברור שאם $N_2 > N_1$ המתח המשני, מתח הפלט, גדול ממתח הקלט, ולהיפך.