פרופ' יהודה ייבין וד"ר ניר שביב
מכון רקח לפיזיקה

חשמל ואופטיקה לתלמידי ביולוגיה. (תשס"ד).

פרק חמישי: הזרם החשמלי. חוק אוהם. מעגלי זרם ישר

צפיפות הזרם ושימור המטען

- עד עכשיו עסקנו בשדות חשמליים המושרים על-ידי התפלגויות מטען קבועות, שאינן משתנות בזמן. השדה החשמלי הכללי מושרה על-ידי התפלגות מטען המשתנה בזמן. בחישוב שדות כאלה יש להתחשב גם בתנועת מטענים. מטענים נעים מהווים זרם חשמלי. בשלב זה נדון אפוא בזרמים חשמליים. והמושג הראשון שנגדיר הוא צפיפות הזרם: נדון בנפח נתון V, שבו נמצאים N מטענים נקודתיים q_n, ומהירות המטען q_n היא $\vec{v}_n$. הזרם החשמלי הכולל בנפח הוא הסכום הווקטורי של התרומות $q_n\vec{v}_n$, וצפיפות הזרם היא השדה הווקטורי המוגדר כגבול

$$\vec{J} = \ell im \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} q_n\vec{v}_n \qquad .\ .\ .\ . \quad V \to 0 \ . \tag{5.1}$$

במוצקים מוליכים נושאי הזרם הם האלקטרונים החופשיים. היונים החיוביים קבועים במקומם ואינם חופשיים לנוע. בגזים מיוננים ובאלקטרוליטים תורמים גם היונים החיוביים לזרם. משנדון במוצק מוליך שבו הצפיפות (המספרית) של אלקטרוני המוליכות היא N_e. המהירות הממוצעת של האלקטרונים החופשיים היא

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N_e}\sum_{n=1}^{N_e} \vec{v}_n \quad . \tag{5.2}$$

אפשר אפוא לבטא את צפיפות הזרם במוליך בתור

$$\vec{J} = -eN_e\langle \vec{v} \rangle \quad . \tag{5.3}$$

ובאופן כללי ביותר, משדנים בתווך מיוּנָן הטרוגני המכיל כמה וכמה נושאי זרם, נרשום ρ במקום $-eN_e$, והביטוי הכללי לצפיפות הזרם הוא

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \quad , \tag{5.4}$$

מקום שאת המהירות הממוצעת של המטענים הנקודתיים נושאי הזרם ציינו בתור $\vec{v}$ (במקום $\langle \vec{v} \rangle$).
ולבסוף נציין שהמטענים יכולים לנוע – ותנועה תרמית הרי קיימת תמיד – והעובדה אינה מונעת $\langle \vec{v} \rangle = 0$. כמו כן נגדיר עוד את הזרם דרך משטח נתון S:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad . \tag{5.5}$$

• היחידות של הגדלים שהזכרנו הן:

$$[I] = \frac{coul}{sec} \equiv amp \ , \ \ [J] = \frac{amp}{m^2} \quad . \tag{5.6}$$

• וחוק שימור המטען מתבטא בקשר האינטגרלי

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d^3x \quad . \tag{5.7}$$

הניסוח המילולי של הקשר הזה מתבטא בקביעה שהמטען העוזב נפח נתון ביחידת זמן שווה מצד אחד לשטף של $\vec{J}$ דרך מעטפת הנפח, ומצד שני הוא שווה לשיעור שבו פוחת המטען הכולל בנפח. את חוק שימור המטען ניתן לבטא גם בניסוח דיפרנציאלי. הואיל ומובן (לפי משפט הדיברגנץ) כי

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} \, d^3x \quad , \tag{5.8}$$

צריך להיות ברור גם כי

$$\nabla \cdot \vec{J} + \dot{\rho} = 0 \quad . \tag{5.9}$$

משוואה זאת, המביעה את חוק שימור הזרם בצורה דיפרנציאלית, ידועה כמשוואת הרציפות לזרם.

• אם מדובר בצפיפות זרם קבועה, השדה $\vec{J}$ חייב להיות חסר מקורות:

$$\dot{\vec{J}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad . \tag{5.10}$$

וזאת מן הטעם הפשוט כי $\dot{\vec{J}} = 0$ מחייב $\nabla \cdot \vec{J}$ קבוע בזמן, ואם $\nabla \cdot \vec{J} \neq 0$, אז $\dot{\rho}$ קבוע בזמן ושונה מאפס, וזה בלתי אפשרי.

<u>חוק אוהם</u>

• אם מפעילים מתח בין שתי נקודות בתווך מוליך, זורם בו זרם, והניסיון מלמד שהזרם מתכונתי למתח:

$$I = \frac{1}{R} V \quad . \tag{5.11}$$

הקבוע R, המאפיין את המוליך המסוים, כולל שתי הנקודות שביניהן מופעל המתח, נקרא ההתנגדות שלו. R תלוי בהרכב החומרי של התווך המוליך, בצורתו, וכמובן בנקודות שביניהן המתח. אולם אנו מעונינים בתכונה "אינטנסיבית" של התווך המוליך, בתכונה האופיינית לתווך. לצורך דיוננו נעיין בגליל מוליך. יהיה A שטח הבסיסים ויהי L גובה הגליל. נפעיל מתח בין הבסיסים. אזי מובן כמעט מאליו, או לפחות מתקבל על הדעת כי

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad . \tag{5.12}$$

מקדם המתכונת ρ, האופייני לחומר ממנו עשוי הגליל, נקרא ההתנגדות הסגולית של התווך.

- הקשרים שרשמנו היו קשרים אינטגרליים. בניגוד ל"מהנדס", מעוניין הפיזיקאי בתנאים המקומיים יותר מאשר בתכונות המערכת, הוא מעוניין בעצם בחוקים הדיפרנציאליים. נחזור אפוא לגליל המוליך (האחיד). מהקשרים המתקיימים בו אנו מסיקים כי

$$I = \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad JA = \frac{EL}{\rho L/A} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{\rho} E = \sigma E \quad . \tag{5.13}$$

מצאנו אפוא קשר בין צפיפות הזרם לבין השדה החשמלי המשרה את הזרם. המקדם σ, הערך ההופכי של ההתנגדות הסגולית, נקרא (כמובן) בשם המוליכות הסגולית של התווך, והנוסחה האחרונה היא הניסוח הדיפרנציאלי של חוק אוהם.

- כסיכום לנאמר עד כה נרשום את הקשרים הבאים, המהווים את תורת הזרמים כולה, והם

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \ , \ \ \nabla \cdot \vec{J} + \dot{\rho} = 0 \ , \ \ \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad . \tag{5.14}$$

הנה כי כן, כדי לטפל בזרמים יש לזכור שהם נקבעים לפי משפט גאוס, משוואת הרציפות וחוק אוהם.

- ואשר ליחידות, רק ליחידת ההתנגדות נקבע שם מיוחד, והאחרות נגזרות ממנו:

$$[R] = \frac{volt}{amp} \equiv ohm \equiv \Omega \ , \ \ [\rho] = \left[R \frac{A}{L} \right] = \Omega \cdot m \ , \ \ [\sigma] = (\Omega \cdot m)^{-1} \quad . \tag{5.15}$$

<u>כמה זמן נדרש למטען להסתדר על-פני מוליך?</u>

- נחזור לקשרי היסוד שרשמנו זה עתה. מחוק אוהם אנו מסיקים כי

$$\nabla \cdot \vec{J} = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \nabla \cdot \vec{D} \quad . \tag{5.16}$$

אם נחלץ את $\nabla \cdot \vec{J}$ על-סמך משוואת הרציפות, ואת $\nabla \cdot \vec{D}$ על-סמך משפט גאוס, נמצא כי

$$\dot{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \quad . \tag{5.17}$$

מצאנו אפוא כי צפיפות המטען בתווך מוליך מקיימת משוואה דיפרנציאלית פשוטה מאוד, שפתרונה המיידי הוא

$$\rho(t) = \rho_0 \, e^{-(\sigma/\varepsilon)t} \quad . \tag{5.18}$$

- מה משמעות התוצאה הזאת? הרי בתווך מוליך אמור המטען להיעלם "מייד". מוליך אידיאלי הוא מושג מופשט שאינו קיים במציאות (להוציא על מוליכים, עניין מורכב שבשלב זה אינו שייך לענייננו). במוליך אידיאלי $\sigma = \infty$, ואילו במוליכים מציאותיים המוליכות סופית. נחושת, למשל, נחשבת למוליך מעולה, ובה $\sigma \approx 10^8 \, (\Omega m)^{-1}$. מה יהיה אפוא משך הזמן שבו ייעלם מטען שיונח בנקודה מסויימת בגוף נחושת? קודם כל צריך להיות ברור כי $\tau = \varepsilon/\sigma$ הוא גודל שממדו זמן. ואומנם

$$\varphi \propto \frac{Q}{\varepsilon r} \quad \Rightarrow \quad [\varepsilon] = \frac{coul}{volt \cdot m} = \frac{amp}{volt}\frac{sec}{m} = \frac{sec}{\Omega \cdot m} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\varepsilon}{\sigma}\right] = sec \quad . \tag{5.19}$$

להערכת סדר הגודל של τ בנחושת נניח כי $\varepsilon \approx \varepsilon_0 \approx 10^{-11}$. או אז

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} \approx \frac{10^{-11}}{10^{8}} = 10^{-19}\ sec \quad . \tag{5.20}$$

פרק זמן כזה, מבחינת עיסוקנו הנוכחי, פירושו באמת "מייד."

מודל מיקרוסקופי למוליכות החשמלית

- מדוע בעצם מתבטא הקשר בין צפיפות הזרם בתווך מוליך לבין השדה החשמלי השורר בו בחוק אוהם? לכאורה מפליא שחוק זה תקף בכלל, משום שעל מטען חופשי בתווך המוליך פועל כוח קבוע, $\vec{F} = q\vec{E}$, ועל כן אפשר היה לצפות שהתאוצה תהיה קבועה, ואילו לפי חוק אוהם, $\vec{J} = \rho\vec{v} = \sigma\vec{E}$, מאפיינת את הזרם דווקא מהירות קבועה. ברור אפוא כי בתווך מוליך אין תנועה חופשית של מטענים. יחד עם זאת צריך להיות ברור שגם אם חוק אוהם תופס בדרך כלל, אין הוא יכול להיות חוק מוחלט.
- באיזה תנאים מתקבלת מהירות קבועה בהשפעת כוח קבוע? – אנו אמורים לדעת שזה קורה כאשר החלקיקים המואצים נעים בתווך צמיג. במילים אחרות, כאשר יש חיכוך. מקור הצמיגות בהתנגשויות של החלקיקים המרכיבים את התווך החומרי. ואשר לזרם החשמלי, חוק אוהם מתחייב מן ההתנגשויות של המטענים המואצים בחלקיקים אחרים ואולי גם בינם לבין עצמם. לצורך דיוננו נדון בגז מיונן. מרבית האטומים, או הפרודות, בגז נייטרליים ומיעוטם מיוננים. הגז המוליך כולל אפוא אטומים נייטרליים וכמה יונים חיוביים ואלקטרונים. כל מרכיבי הגז משתתפים בתנועה התרמית ומתנגשים זה בזה. התנועה של חלקיק בודד בגז אקראית, ועלינו לדון אפוא בהתפלגות המהירויות (הסקלריות) והכיוונים. כאשר הגז במנוחה ההתפלגות הזוויתית איזוטרופית, והמהירות (הווקטורית!) הממוצעת מתאפסת. ואשר להתפלגות הערכים המוחלטים של המהירויות, מן המכניקה הסטטיסטית ידוע כי

$$n(\mathrm{v}) \propto \mathrm{v}^2\, e^{-m\mathrm{v}^2/2kT} \quad . \tag{5.21}$$

כאן m היא המסה של החלקיקים, T הטמפרטורה המוחלטת (לאמור במעלות קֶלבין) של התווך, ואילו k הוא הקבוע של בולצמן, קבוע עולמי שערכו

$$k = 1.38 \times 10^{-23}\ joule/^\circ K \quad . \tag{5.22}$$

הגודל kT ממדו אנרגיה, והוא סדר הגודל של האנרגיה הממוצעת של החלקיקים בתווך שהטמפרטורה שלו T.

- הבה נעקוב אחרי תנועתו של חלקיק מסוים בגז. בזמן נתון החלקיק נע בכיוון מסוים במהירות מסויימת. בהתנגשות הראשונה של החלקיק גם המהירות וגם הכיוון משתנים, ואחרי כמה התנגשויות אובד הקשר בין המהירות והכיוון באותו זמן לבין ערכיהם המקוריים. קיים אפוא משך זמן מסוים τ האופייני לאובדן הקשר הזה. ליתר דיוק יש לקבוע שמדובר על איבוד המְתאם בין

המהירות והכיוון בזמן נתון t לבין ערכיהם בזמן $t+\tau$. כדי לא לסבך את העניין, מותר להניח שכל חלקיק "שוכח" את עברו אחרי כל התנגשות. זה קורה למעשה אם הפיזור איזוטרופי. ואז משך הזמן האופייני τ הוא משך המעוף החופשי (הממוצע) של החלקיקים בתווך.

- אחרי הדיון האיכותי והכללי נדון עתה באופן כמותי במה שקורה ליונים ולאלקטרונים בגז המיוּנן בהשפעת שדה חשמלי קבוע (בזמן). בין התנגשויות עוקבות כל חלקיק טעון מואץ בשדה החשמלי. יהי $m\vec{u}$ התנע של החלקיק מייד לאחר התנגשותו האחרונה, ויהי t משך הזמן למן ההתנגשות, אבל בטרם התנגש החלקיק שנית. או אז התנע של החלקיק בזמן t הוא

$$\vec{p} = m\vec{u} + q\vec{E}t \quad . \tag{5.23}$$

כאמור אנו מניחים שההתנגשויות איזוטרופיות. התנע הממוצע של היונים החיוביים בגז בזמן נתון הוא אפוא

$$m_+\langle \vec{\mathrm{v}}_+ \rangle = \frac{1}{n_+}\sum_{i=1}^{n_+}\left(m_+\vec{u}_i + e\vec{E}t_i\right) \quad , \tag{5.24}$$

מקום אשר t_i הוא משך הזמן מההתנגשות האחרונה של היון i. כאמור, ההתנגשויות איזוטרופיות, ועל כן $\Sigma\vec{u}_i = 0$ הנה כי כן, בעצם

$$m_+\langle \vec{\mathrm{v}}_+ \rangle = e\vec{E}\,\frac{1}{n_+}\Sigma t_i = e\vec{E}\langle t \rangle \quad . \tag{5.25}$$

אבל $\langle t \rangle = \tau_+$, מקום אשר τ_+ הוא משך המעוף החופשי של היונים החיוביים. מצאנו אפוא ביטוי למהירות הטרידה (drift בלע"ז) של היונים החיוביים:

$$\langle \vec{\mathrm{v}}_+ \rangle = \frac{e}{m_+}\,\tau_+\vec{E} \quad . \tag{5.26}$$

- עתה נוכיח שממוצע משך הזמן למן ההתנגשות האחרונה אכן שווה למשך המעוף החופשי. לשם זה נדון בנפח גז נתון, בתנאי לחץ וטמפרטורה קבועים. תהי n הצפיפות המספרית של החלקיקים בנפח הגז הנתון, ויהי τ משך המעוף החופשי בו, לאמור τ הוא משך הזמן הממוצע בין התנגשות להתנגשות. אז גם צפיפות ההתנגשויות בגז (מספר ההתנגשויות ביחידת נפח ביחידת זמן) קבועה, וערכה n/τ (משום שמספר ההתנגשויות של כל חלקיק ביחידת זמן הוא $1/\tau$). מספר ההתנגשויות ביחידת נפח ברווח הזמן dt הוא ndt/τ, וההסתברות של חלקיק אחד להתנגש ברווח הזמן (הזעיר!) dt היא אפוא dt/τ, ואינה תלויה בהיסטוריה שלו.

- תהי $q(t)$ ההסתברות של חלקיק לא להתנגש עד לזמן t. הסתברות זאת מקיימת את הקשר

$$q(t+dt) = q(t)\left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \quad . \tag{5.27}$$

וקשר זה פירושו שהפונקציה $q(t)$ מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית

$$\dot{q}(t) = -\frac{q(t)}{\tau} \quad , \tag{5.28}$$

שפתרונה, המוכר לנו כבר, ועם תנאי ההתחלה $q(0)=1$, הוא

$$q(t) = e^{-t/\tau} \quad . \tag{5.29}$$

ההסתברות להתנגש ברווח הזמן בין t לבין $t+dt$ היא אפוא $p(t)dt = q(t)\,dt/\tau$, ועל כן

$$p(t) = \frac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau} \quad . \tag{5.30}$$

ומכאן שמשך הזמן הממוצע למן ההתנגשות האחרונה הוא

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t\, p(t)dt = \tau \int_0^\infty \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}\, \frac{dt}{\tau} = \tau \int_0^\infty x e^{-x} dx = \tau \quad . \tag{5.31}$$

אגב, אינטגרל שראוי לזכור הוא $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$, והשוויון הימני הוא המקרה הפרטי n=1.

- נחזור לענייננו, ונזכיר את מהירות הטרידה של היונים החיוביים בגז. ביטוי אנלוגי מתקבל למהירות הטרידה של האלקטרונים. הנה כי כן, צפיפות הזרם בגז היא

$$\vec{J} = en_+ \frac{e}{m_+} \tau_+ \vec{E} + (-en_-)\frac{(-e)}{m_-} \tau_- \vec{E} = e^2 n \left(\frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-} \right) \vec{E} \quad . \tag{5.32}$$

גזרנו אפוא את חוק אוהם ממש! ומצאנו, באופן הכללי ביותר, את המוליכות הסגולית בתווך מוליך:

$$\sigma = \sum_i \left(\frac{q^2 n \tau}{m} \right)_i \quad , \tag{5.33}$$

מקום שהציון i מתייחס לכל סוגי היונים ולאלקטרונים (החופשיים) בתווך.

- עתה נוכל להבין מתי, ומדוע, נכשל חוק אוהם. בגזירת חוק אוהם הנחנו, בלי לקבוע זאת במפורש, שתוספת בתנע בין ההתנגשויות זניחה בהשוואה לתנע המתחייב מהתנועה התרמית. אם אין זה המצב, נעשה τ תלוי בעוצמת השדה החשמלי, והקשר בין $\vec{J}$ לבין $\vec{E}$ מפסיק להיות ליניארי. וזה קורה אם השדה חזק מאוד או אם הצפיפות קטנה מאוד.
- במקום לדון בתנע אפשר לדון באנרגיה של נושאי הזרם. כבר ציינו שהאנרגיה הממוצעת של החלקיקים בגז היא מסדר הגודל של kT. תוספת האנרגיה לחלקיק הטעון בין התנגשות להתנגשות היא $eE\lambda$, מקום אשר λ הוא המהלך החופשי של החלקיקים בגז ($\lambda = \mathrm{v}\tau$). חוק אוהם ייכשל אפוא אם

$$eE\lambda >> kT \quad . \tag{5.34}$$

- יחידת האנרגיה הנוחה לדיון במערכות אטומיות היא האלקטרון-וולט:

$$1\,eV = \left(1.6\times10^{-19}\ coul\right)\left(1\,volt\right) = 1.6\times10^{-19}\ joule\quad . \tag{5.35}$$

הטמפרטורה המתאימה לאנרגיה ממוצעת של חלקיקי גז בשיעור אלקטרון-וולט היא

$$T = \frac{1.6\times10^{-19}}{1.4\times10^{-23}} = 11600\,^{\circ}K\quad , \tag{5.36}$$

והאנרגיה הממוצעת של החלקיקים בגז ב"טמפרטורת החדר" (20 °C) היא

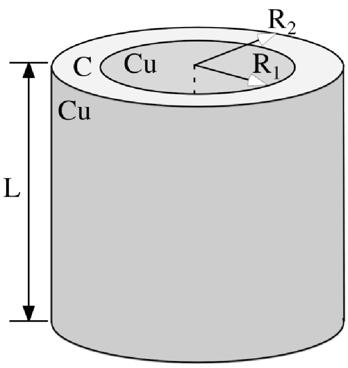
$$\left\langle \tfrac{1}{2}mv^2 \right\rangle = 1\,eV\,\frac{300}{11600} \approx 0.025\,eV = 4\times10^{-21}\ joule\quad . \tag{5.37}$$

המהלך החופשי של פרודות האוויר, בלחץ אטמוספרי, הוא מסדר הגודל של 100 אנגסטרם. מכאן שעוצמת השדה החשמלי שעבורה מפסיק חוק אוהם להיות תקף במקרה זה היא מסדר הגודל של

$$E = \frac{kT}{e\lambda} = \frac{\left(1/40\right)volt}{10^{-8}\ m} = 2.5\times10^{6}\ \frac{volt}{m}\quad . \tag{5.38}$$

<u>מעגלי זרם ישר</u>

- הגודל המאפיין תווך מוליך הוא המוליכות הסגולית (או ההתנגדות הסגולית) שלו. להלכה, אם גודל זה ידוע, אפשר להעריך את ההתנגדות של כל גוף העשוי מן החומר הנדון. קל מאוד לקבוע את ההתנגדות של מוליך בעל חתך קבוע: $R = \rho\, A/L$. מנוסחה זאת אכן הגדרנו את ההתנגדות הסגולית. הבה נבחן מוליך בעל חתך משתנה, ונראה איך ניתן לחשב את המוליכות שלו. נדון בגליל גרפיט חלול (לאמור בקליפת גרפיט גלילית) המצופה נחושת בצידו הפנימי וגם בצידו החיצוני. בהנחה המוצדקת



$$\rho = \rho_C >> \rho_{Cu}\quad , \tag{5.39}$$

הרי עם הפעלת מתח בין אלקטרודות המתכת יזרום בגרפיט זרם רדיאלי, וכך חתך המוליך – הניצב לכיוון הזרם – משתנה. ננסה אפוא להעריך את ההתנגדות של המוליך הזה.

- ראשית נחשב את השדה החשמלי בגליל. מטעמי סימטרייה ברור כי $E \propto 1/r$. נאמר $E = \alpha/r$. נראה עתה איך ניתן לקבוע את α:

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \ldots = \alpha\,\ell n\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad\Rightarrow\quad E = \frac{V}{\ell n\left(R_2/R_1\right)}\frac{1}{r}\quad . \tag{5.40}$$

מובן כי R_1 הוא הרדיוס הפנימי של הגליל וכי R_2 הוא הרדיוס החיצוני. צפיפות הזרם בנגד היא $J = \sigma E$, והזרם דרך הנגד, שאורכו L, הוא

$$I = 2\pi rL\times\frac{\sigma V}{r\,\ell n\left(R_2/R_1\right)}\quad . \tag{5.41}$$

כמצופה, הזרם דרך הנגד אחיד ואינו תלוי בשיעור r. מכל מקום, אנו מוצאים כי

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho \, \ell n\left(R_2 / R_1\right)}{2\pi L} \quad . \qquad (5.42)$$

- איך מתחברים נגדים בטור ובמקביל, לאמור מה ההתנגדות הכוללת של מערכות נגדים אלה? – אשר לנגדים בטור, ברור שהמתח על המערכת הוא סכום המתחים, והזרם אחיד:

$$V = \Sigma V_n = \Sigma R_n I = \left(\Sigma R_n\right) I \quad \Rightarrow \quad R = \Sigma R_n \quad . \qquad (5.43)$$

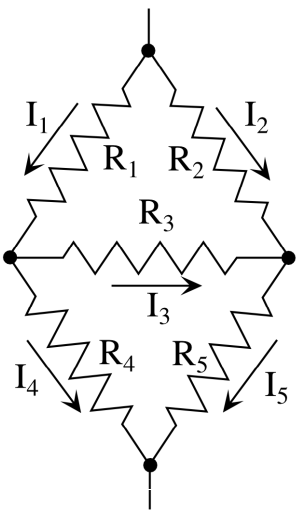
ואילו במערכות נגדים במקביל, הזרמים מתחברים והמתח אחיד:

$$I = \Sigma I_n = \Sigma \frac{V}{R_n} = \left(\Sigma \frac{1}{R_n}\right) V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{R_n} \quad . \qquad (5.44)$$

הנה כי כן, לנגדים בטור מתחברות ההתנגדויות, ולנגדים במקביל המוליכויות.

<u>מעגלי נגדים מורכבים</u>

מה אפשר לומר על מעגלי נגדים מסובכים יותר, שאי אפשר לפרקם לחוליות "פשוטות" שהן עצמן מחוברות בטור או במקביל? מהי, למשל, ההתנגדות הכוללת של ה"גשר" המתואר בתרשים?



בבעייה זאת נתון המתח על-פני המערכת, ונתונות חמש ההתנגדויות R_1 עד R_5. כדי לקבוע את ההתנגדות הכוללת, R, של המעגל יש למצוא את הזרם הכולל, I, דרכו. בסך הכל מדובר בעצם בשישה נעלמים: הזרם הכולל והזרמים דרך כל נגד ונגד. עלינו למצוא אפוא שישה קשרים בלתי תלויים שהם מקיימים. זאת נעשה באמצעות הכללים הידועים בתור חוקי קירכהוף, והמתייחסים לצמתים וללולאות במעגל:

(א) חוק שימור המטען קובע שבכל צומת $\Sigma I_n = 0$. מובן שיש להתחשב במגמות הזרמים, ומדובר אפוא בסכום האלגברי המתאפס של הזרמים.

(ב) כיוון שהשדה האלקטרוסטטי משמר, מתאפס סכום המתחים סביב כל לולאה: $\Sigma V_n = 0$.

במעגל הגשר שלנו ארבעה צמתים ושלוש לולאות, לאמור

$$I = I_1 + I_2 \ , \ \ I_1 = I_3 + I_4 \ , \ \ I_2 + I_3 = I_5 \ , \ \ I_4 + I_5 = I \quad . \qquad (5.45)$$

אולם ארבע משוואות הצמתים אינן בלתי תלויות: סכום שלוש הראשונות נותן את הרביעית. בידנו אפוא שלוש משוואות בלתי תלויות. אשר למשוואות הלולאות, הרי הן

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = R_2 I_2 \ , \ \ R_3 I_3 + R_5 I_5 = R_4 I_4 \ , \ \ R_1 I_1 + R_4 I_4 = R_2 I_2 + R_5 I_5 \quad . \qquad (5.46)$$

גם אלה אינן בלתי תלויות, שכן סכום שתי הראשונות נותן את השלישית. הנה כי כן יש לנו חמש משוואות. השישית קובעת שהמתח על-פני הגשר הוא V, והיא, למשל,

$$R_1 I_1 + R_4 I_4 = V \quad . \qquad (5.47)$$

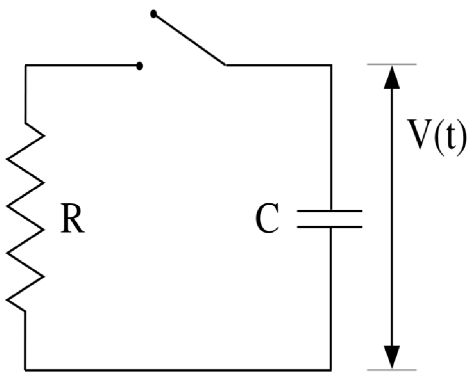
בידנו כעת שש משוואות בלתי תלויות עבור חמשת הזרמים החלקיים ועבור הזרם הכולל I. הפתרון מסורבל למדי (נסו-נא לפתור!). מכל מקום מה שמעניין אותנו הוא ההתנגדות הכוללת $R = V/I$. הביטוי המתקבל עבורה הוא

$$R=\frac{\sum\limits_{\ell<m<n} R_\ell R_m R_n - R_1R_3R_4 - R_2R_3R_5}{\sum\limits_{m<n} R_m R_n - R_1R_2 - R_4R_5} \quad . \tag{5.48}$$

לגבי תוצאה זאת מן הראוי להעיר כמה הערות "איכותיות." ראשית ברור מראש שההתנגדות הכוללת של הגשר תתקבל כפונקציה של ההתנגדויות של מרכיביו. כן ברור שהממד של הביטוי המתקבל חייב להיות ממד של התנגדות. שנית צריך להיות ברור גם כי מספר המחוברים במונה חייב להיות שווה למספרים במכנה. וזאת משום שאם $R_n=1\Omega$ לכל n, *אז גם* $R=1\Omega$ *! (מדוע?) בנוסף לקביעות הללו, ובהסתמך עליהן, ברור כמעט מאליו שנקבל במונה מכפלות של שלושה גורמים, ובמכנה של שניים, בזכות השוויון* $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}$. *ועוד נציין שכיוון שאי אפשר להחליף שתי התנגדויות בלי לשנות את ההתנגדות הכוללת, יש להחסיר במונה את הצירופים המשתייכים לשני הצמתים המשולשים ובמכנה את אלה של שני הצמתים הכפולים*

- כן נציין שהספק הזרם הוא RI^2, שכן

$$W=VQ \quad \Rightarrow P=\frac{W}{t} \quad \Rightarrow \quad VI=RI^2 \quad . \tag{5.49}$$



- לבסוף נדון בצירוף של קבל ונגד. נעיין אפוא בתרשים. מרגע שסוגרים את המעגל מתקיים בכל זמן הקשר

$$I=\frac{V}{R}=\frac{q}{RC}=-\dot{q} \quad \Rightarrow \quad q(t)=Q\,e^{-t/RC} \quad . \tag{5.50}$$

תוצאה זאת אפשר לבטא גם באמצעות הזרם:

$$I=-\dot{q}=\frac{Q}{RC}e^{-t/RC}=I_0\,e^{-t/RC} \quad . \tag{5.51}$$

הגודל RC, שממדו (כמובן!) זמן, הוא "המחזור" של המעגל, או "קבוע הזמן" שלו.