פרופ' יהודה ייבין וד"ר ניר שביב
מכון רקח לפיזיקה

חשמל ואופטיקה לתלמידי ביולוגיה (תשס"ד).

פרק רביעי: קבלים ותווכים דיאלקטריים

מבוא בסיסי: הגדרת הקיבול ויחידתו הפָרָד

- נדון בשני מוליכים הנושאים מטענים שווים בגודלם ושונים בסימניהם, לאמור $\pm Q$, והמתח (הפרש הפוטנציאלים) ביניהם הוא V. מערכת כזאת נקראת קַבָּל. המתח V מתכונתי לעוצמת המטענים שנושאים המוליכים. היחס הקבוע בין עוצמת המטען למתח נקרא הקיבול: $C = Q/V$. הקיבול הוא אפוא מַדָד לכושר הקבל הנדון לאגור מטען, וכפי שיתברר לנו בהמשך, משמעות הדבר אגירת אנרגיה.
- ברור שהיחידה המעשית של הקיבול היא יחידת מטען ליחידת מתח (או פוטנציאל) והשם שניתן לה הוא פָרָד (לכבודו של מיכאל פרדיי):

$$farad = \frac{coul}{volt} \quad . \tag{4.1}$$

אולם הפרד היא יחידת קיבול ענקית, והקיבולים של קבלים מצויים נעים בין מיקרו-פרד $\left(\mu F = 10^{-6} F\right)$ לבין פיקו-פרד $\left(pF = 10^{-12} F\right)$.

- כדי להדגים את הנאמר זה עתה, הבה נעריך את הקיבול של כדור מוליך שרדיוסו R והנושא מטען Q. המוליך האחר יהיה קליפה כדורית חד-מרכזית שרדיוסה אינסופי, והפוטנציאל על פניה V=0. אנו יודעים כבר שהפוטנציאל על-פני הכדור הוא $Q/\left(4\pi\varepsilon_0 R\right)$. ומכאן שהקיבול של הכדור המוליך הוא $C = Q/V = 4\pi\varepsilon_0 R$. ועוד נעריך, למשל, את הקיבול של כדור מוליך שרדיוסו 1 ס"מ:

$$C = \frac{1}{9\times 10^9}\times 10^{-2} = 1.11\times 10^{-12}\ F = 1.11\ pF \quad . \tag{4.2}$$

מתברר אפוא שאכן היחידות האחרות שציינו הן ענקיות. אפילו כדור מוליך שקיבולו מיקרו-פרד רדיוסו הוא (כמובן) 10 ק"מ ...

משוואת לפלס ופונקציות הרמוניות

- מן הראוי שנדון בנושא הקבלים באופן "מתקדם," או מתוחכם, קצת יותר. הבעייה הכללית שבה נדון היא חישוב השדה החשמלי המושרה על-ידי מערכת גופים מוליכים נתונה, שחלקם או כולם טעונים. פני כל גוף, בהיותו מוליך אידיאלי, הוא משטח שווה-פוטנציאל, ובתווך בין המוליכים מקיים הפוטנציאל את המשוואה

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \quad . \tag{4.3}$$

משוואה זאת, הידועה בשם משוואת לפלס, היא אחת המשוואות החשובות ביותר בפיזיקה. הפתרונות של משוואת לפלס ידועים בשם פונקציות הרמוניות,.ולהן תכונות מופלאות. למרבה הצער הדיון המתמטי בנושא זה הוא מעבר לרמת ההרצאה שלנו, ואנו נסתפק בציון המשפט הבא:

- ערכה הממוצע של פונקציה הרמונית על-פני כדור כלשהו, בתחום שבו הפונקציה קיימת, שווה לערכה במרכז הכדור. במילים אחרות, אם הפונקציה $\varphi(\vec{x})$ הרמונית, אז

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi R^2}\oint_{|\vec{x}-\vec{x}'|=R}\varphi(\vec{x}')d^2S' \quad . \tag{4.4}$$

זהות זאת מתקיימת, כאמור, לכל $\vec{x}$ ולכל R.

- מהמשפט הזה מתחייב משפט העזר הבא: פונקציה הרמונית בתחום נתון מקבלת את ערכיה הקיצוניים, המירבי והמזערי, על שפת התחום. שאם לא כן, לא יוכל הערך הקיצוני להיות שווה לממוצע הפונקציה על-פני כדור שמרכזו בנקודה שבה הוא מתקבל.
- ובהקשר האלקטרו-סטטי משפט העזר מתבטא בקביעה שאין שדה חשמלי בריק (!) שבו נמצא מטען נקודתי בשיווי-משקל יציב.

<u>שדות חשמליים סביב מוליכים</u>

נחזור לעניין השדה החשמלי המושרה על-ידי N גופים מוליכים. עלינו לפתור אפוא את משוואת לפלס בתנאי שפה שיכולים להיות:

(א) הערכים φ_n, $n=1,2,...,N$, של הפוטנציאל הקבוע על-פני כל מוליך; או

(ב) הערכים Q_n של המטען הכולל שנושא כל מוליך; או

(ג) מעורבים, כאשר לגבי כמה מוליכים נתונים ערכי הפוטנציאל על-פניהם, ולגבי האחרים המטענים הכוללים שהם נושאים. אבל צריך להיות ברור שלגבי אותו מוליך אי-אפשר לקבוע מראש גם את הפוטנציאל וגם את המטען.

- התנאים שמנינו קובעים את הפתרון באופן חד-ערכי. נדון למשל במקרה שבו נתונים הערכים φ_n על-פני המוליכים המרכיבים מערכת נתונה. ההוכחה פשוטה בתכלית: נניח כי גם הפונקציה φ וגם הפונקציה ψ פותרות את הבעייה. אז ברור שגם הפונקציה $\xi=\varphi-\psi$ היא פתרון, המקיים את תנאי השפה $\xi_n=0$. וזה מחייב $\xi=0$, (משום שאם לא כן, אז הפונקציה ההרמונית ξ מקבלת ערך קיצוני שלא על שפת התחום שבו היא מוגדרת), זאת אומרת $\varphi=\psi$.
- ובמקרה שבו נתונים המטענים Q_n שנושאים המוליכים השונים, אם φ הוא פתרון, אז השטפים של $\nabla\varphi$ דרך מעטפות המוליכים שווים לערכים $-Q_n/\varepsilon_0$ המתאימים. אם גם ψ הוא פתרון, ועל כן גם $\xi=\varphi-\psi$, נגיע למסקנה כי

$$\oint_{S_n} \nabla\xi \cdot d\bar{S} = 0 \tag{4.5}$$

לכל n. פתרון זה מתאים אפוא למצב שבו אין המוליכים טעונים כלל, כלומר אין שדה חשמלי והפוטנציאל קבוע. פירוש הדבר כי, פרט לקבוע חיבורי שווה הפונקציה ψ לפונקציה φ.

<u>הקבל הכדורי</u>

- נדון במערכת הכוללת שתי קליפות כדוריות מוליכות חד-מרכזיות. הרדיוס החיצוני של הקליפה הפנימית הוא R_1, והרדיוס הפנימי של החיצונית הוא R_2, והן נושאת מטענים Q_1 ו- Q_2 בהתאמה. הפוטנציאל בשדה החשמלי המושרה על-ידי המערכת הזאת הוא

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{Q_1 + Q_2}{r} & \quad .\ .\ .\ .\quad r \ge R_2 \\[2ex] \dfrac{Q_1}{r} + \dfrac{Q_2}{R_2} & \quad R_1 \le r \le R_2 \\[2ex] \dfrac{Q_1}{R_1} + \dfrac{Q_2}{R_2} & \quad r \le R_1 \end{cases} \tag{4.6}$$

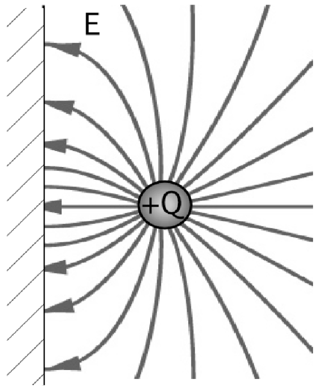
התוצאה הזאת מתקבלת על נקלה מעקרון ההרכבה. בתוך הכדור הפנימי הפוטנציאל קבוע והשדה מתאפס. ואם $Q_1 + Q_2 = 0$, הפוטנציאל קבוע גם מחוץ לקליפה החיצונית; שדה חשמלי יתקיים אז רק בין הקליפות, והמערכת היא אז קבל כדורי.

<u>קרום התא החי הוא קבל</u>

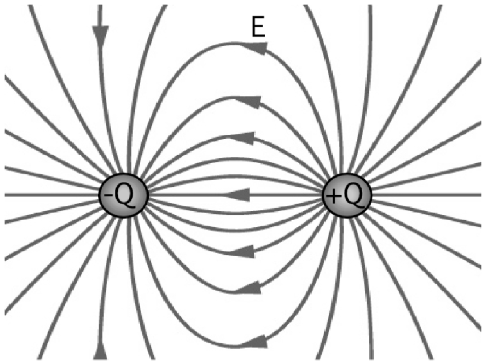
- הקרום החיצוני של תא מן החי הוא למעשה קבל "לוחות," בהיותו שכבה מבודדת בעלת שפות מקבילות המפרידה בין שני תווכים מוליכים. האחד הוא התווך הנוזלי המוליך המקיף את התא, והאחר הוא התווך הנוזלי המוליך הכלוא בתא. הקיבול של הקרום החיצוני של תא מצוי הוא בקירוב מאית פרד למטר רבוע: $10^{-2}\,Fm^{-2}$. לפי מה שכבר אמרנו בזיקה ליחידות הקיבול ובמיוחד בנוגע לפָרָד שהוא קיבול ענק, קיבול הקרום ליחידת שטח הוא אכן גדול מאד. תוצאה זאת מתחייבת משום שעובי הקרום, d, הוא דק ביותר. הבה נעריך את המתח על-פני הקרום בעקבות מעבר כמה יונים דרכו. נדון במודל פשטני של התא. נניח שמדובר בכדור שרדיוסו 5 מיקרון המכיל תמיסה של עשירית המוֹל אשלגן כלורי (KCl). שטח קרום התא הוא אפוא 3.14×10^{-10} מ"ר, והקיבול הכולל של הקרום הוא $3.14\times10^{-12}\,F = 3.14\,pF$. כדי ליצור מתח בר-מדידה על פני הקרום, למשל 5 מילי-וולט, עלינו להעביר דרכו את המטען $Q = CV = 3.14\times10^{-12}\times0.005 = 1.57\times10^{-14}\,C$, שפירושו $N = Q/e = 1.57\times10^{-14}/1.6\times10^{-19} = 9.8\times10^{4}$ יונים (חד-ערכיים). הבה נברר מה מספר זוגות היונים בתא. לפי ההגדרה מספר הזוגות בליטר הוא $N_a/10$ (N_a הוא מספר אבוגדרו), ועל כן מספרם בנפח התא שבו אנו דנים הוא $6.02\times10^{22}\times\frac{4\pi}{3}\left(10^{-6}\right)^3/10^{-3} = 2.52\times10^{8}$. הנה כי

כן, כדי לייצר מתח בשיעור 5 מילי-וולט על-פני קרום התא, מתח הניתן למדידה בקלות, נדרש שינוי זעיר במספר יוני האשלגן בתא, לאמור פחות מחצי פרומיל. עניין זה מדגים שוב את עוצמת השדה החשמלי, שכן את האפקט החשמלי של העברת יונים דרך קרום התא קל הרבה יותר למדוד מאשר כל אפקט מקרוסקופי אחר של מעבר היונים.

<u>השדה המושרה ע"י מקור נקודתי Q הקבוע במרחק r ממישור מוליך אינסופי</u>

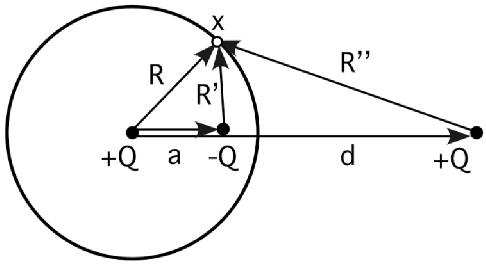


- ברור שהמישור הוא משטח שווה פוטנציאל, וכי על-כן השדה בסביבת המישור המוליך ניצב למישור. בפתרון הבעייה נסתמך על יחידות הפתרון. אם בדרך כלשהי נמצא פתרון המקיים את תנאי השפה, אז ברור שזה הפתרון. ואומנם, השדה המושרה על-ידי מטעננו Q ועל-ידי תמונתו המשתקפת במישור, לאמור מטען Q – ברוחק r– מהמישור המוליך, מקיים את התנאים שמנינו בדיוק נמרץ, ועל כן הוא הוא הפתרון המבוקש. שיטה זאת ידועה כשיטת התמונות.



<u>השדה המושרה ע"י מטען נקודתי Q מחוץ לכדור מוליך שרדיוסו R במרחק d ממרכז בכדור</u>

- תנאי השפה הינם היות פני הכדור משטח שווה-פוטנציאל, והתאפסות המטען הכולל על פניו. ניחוש שיטת התמונות הפעם הוא זוג מטענים נקודתיים, +Q' במרכז הכדור וכן –Q' במרחק a מהמרכז לאורך ציר הסימטרייה של הבעייה. ניתן להראות כי הנעלמים Q' ו-a נקבעים מהיחסים



$$\frac{Q'}{Q}=\frac{a}{R}=\frac{R}{d} \quad . \tag{4.7}$$

ואומנם, בחירת שני המטענים המדומים בתוך הכדור, השווים בעוצמה ושונים בסימן, מבטיחה את התאפסות המטען הכולל על-פני הכדור. ואשר להיות פני הכדור משטח שווה-פוטנציאל, נוודא בחישוב מפורט שאכן זה המצב.

- בסימון המוגדר בתרשים יהיה הפוטנציאל בכל נקודה על-פני הכדור

$$\varphi=\varphi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[Q'\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)+\frac{Q}{R''}\right] \quad . \tag{4.8}$$

את הארגומנט x יש לפרש כמייצג את כל הנקודות על הטבעת המעגלית שהיא החיתוך של המישור הניצב לציר הסימטרייה בנקודה x עם פני הכדור. מובן מאליו שבזכות הסימטרייה הצירית של הבעייה הרי בכל מקרה כל הנקודות על הטבעת שוות פוטנציאל. את המשוואה הזאת נרשום בצורה הבאה:

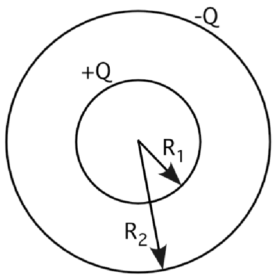
$$4\pi\varepsilon_o \frac{d}{Q}\varphi(x) = \frac{d}{R}\frac{Q'}{Q}\left(1 - \frac{R}{R'}\right) + \frac{d}{R''} = 1 - \frac{R}{R'} + \frac{d}{R''} \quad , \tag{4.9}$$

מקום שהשוויון האחרון מסתמך על $Q'/Q = R/d$. כמו כן נציין שהמשולש שצלעותיו a, R ו- R' דומה למשולש הגדול, שצלעותיו R, R'' ו-d, כיוון שלשני המשולשים זווית משותפת אשר מנת שוקיה במשולש הקטן, a/R, זהה למנה המתאימה, R/d, במשולש הגדול. מכאן מתחייב, כמובן, גם השוויון $R/R' = d/R''$. וכך אנו מוצאים שהפוטנציאל המבוקש הוא

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d} \quad . \tag{4.10}$$

הנה כי כן, הפוטנציאל שמצאנו בנקודות על-פני הכדור המיוצגות על-ידי x, אינו תלוי כלל בערכו של x. פני הכדור הם אכן משטח שווה-פוטנציאל.

<u>הקבלים הבסיסיים</u>



- נחזור ונעיין במערכת הכוללת שתי קליפות כדוריות מוליכות חד-מרכזיות. אם המטענים שנושאות הקליפות הם $Q = Q_1 = -Q_2 > 0$, אז

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad .\;.\;.\;. \quad R_1 \le r \le R_2 \quad , \tag{4.11}$$

וזאת כאשר המתח הוגדר כ- 0 על פני R_2, ועל כן המתח על-פני הקבל הכדורי הוא

$$V = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad , \tag{4.12}$$

וקיבולו של הקבל הכדורי הוא אפוא

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \quad . \tag{4.13}$$

וכאשר $R_2 \to \infty$, אנו חוזרים ומוצאים שהקיבול של קליפה כדורית שרדיוסה R הוא אכן

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad . \tag{4.14}$$

- נדון במקרה גבולי אחר: כאשר $\Delta R = R_2 - R_1 << R$. אז אנו מוצאים כי

$$C \approx 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{\Delta R} = \varepsilon_0 \frac{A}{\Delta R} \quad , \tag{4.15}$$

שאינו אלא הקיבול של קבל לוחות. כדי לראות כיצד מתקבלת תוצאה זאת במישרין, נזכיר כי השדה (האחיד) בקבל הוא $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(\varepsilon_0 A)$, מקום אשר A הוא השטח של כל לוח. המתח על-פני הקבל הוא $V = Ed = Qd/(\varepsilon_0 A)$, מקום אשר d הוא הרווח בין הלוחות. ולבסוף $C = Q/V = \varepsilon_0 A/d$.

<u>צירופי קבלים במקביל ובטור</u>

- נדון במערכת הכוללת N קבלים המחוברים במקביל, והמתח על-פני המערכת הוא V. פירוש הדבר שזה המתח על-פני כל קבל, לאמור $q_n = C_n V$. משנחבר את N המשוואות, נקבל:

$$\sum_{n-1}^{N} q_n = \left(\sum_{n-1}^{N} C_n\right) V \quad . \tag{4.16}$$

אולם סכום המטענים הוא המטען הכולל על המערכת בתור קבל שווה ערך, ועל כן הקיבול של המערכת בתור קבל הוא בהכרח

$$C = \sum_{n-1}^{N} C_n \quad . \tag{4.17}$$

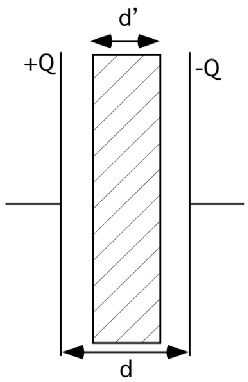
- ואשר למערכת הכוללת N קבלים המחוברים בטור, כאשר המתח המופעל עליה הוא V, אזי פירוש הדבר שהמטען על-פני כל קבל הוא אותו מטען, לאמור $V_n = Q/C_n$. שוב, חיבור N המשוואות מסתכם בקשר

$$V = \sum_{n-1}^{N} V_n = Q\left(\sum_{n-1}^{N} \frac{1}{C_n}\right) = \frac{Q}{C} \quad . \tag{4.18}$$

הנה כי כן, לגבי הקבלים בטור אנו מסיקים שהקיבול שווה-הערך נגזר מהקשר

$$\frac{1}{C} = \sum_{n-1}^{N} \frac{1}{C_n} \quad . \tag{4.19}$$

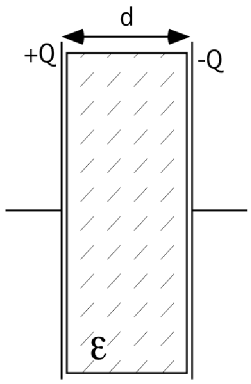
<u>השדה המקרוסקופי בתווך דיאלקטרי</u>



- נחזור ונדון בקבל לוחות. יהיו A השטח של כל לוח ו-d הרווח ביניהם. הקיבול של קבל כזה הוא, כזכור, $C = \varepsilon_0 A/d$. אם בין הלוחות יוכנס לוח מוליך שעוביו $d'(< d)$, שיהיה מקביל ללוחות, יהיה קיבול המערכת

$$C' = \varepsilon_o \frac{A}{d - d'} \quad . \tag{4.20}$$

תוצאה זאת אמורה להיות מובנת מאליה! מכל מקום, מה קורה אם בין הלוחות מכניסים טבלה מבודדת? הניסיון מלמד שגם במקרה כזה הקיבול עולה, אך לא עד כדי הערך C' שרשמנו זה עתה. נדון בקבל לוחות שכל התחום שבין לוחותיו מלא חומר מבודד. הגורם שבו עולה הקיבול מאפיין את החומר המבודד המסוים. באופן כללי יותר,אם לגבי קבל מסוים, ולאו דווקא קבל לוחות, הקיבול בריק הוא C_0, אז אם המרחב שבו נמצא הקבל מלא בחומר מבודד מסוים, תמיד יעלה הקיבול ויהיה $C = \kappa C_0$. אגב, ברור שאם מדובר בקבל לוחות, או בקבל כדורי, מספיק למלא רק את החלל בין האלקטרודות בחומר המבודד. הגורם שבו עולה הקיבול, κ, נקרא הקבוע הדיאלקטרי <u>היחסי</u> של התווך הנדון, והמקדם $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ נקרא הקבוע הדיאלקטרי של התווך. ואם נחזור לקבל הלוחות, הרי כאשר החלל בין הלוחות מלא בחומר מבודד, הנקרא בהקשר זה חומר דיאלקטרי, או דיאלקטריקון, יהיה הקיבול

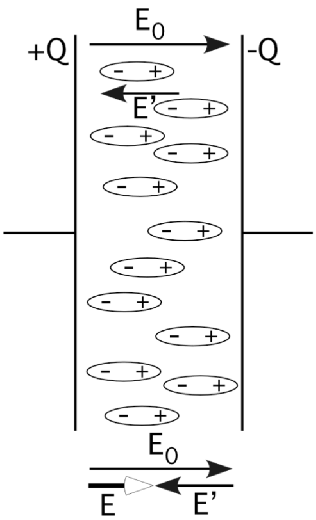


$$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d} \quad . \qquad (4.21)$$

נציין כמה ערכים טיפוסיים של הקבוע הדיאלקטרי היחסי. בגזים $\kappa \approx 1$. באוויר, למשל, בלחץ אטמוספרי ובטמפרטורה $0^\circ C$, $\kappa = 1.0006$. באדי מים, בלחץ אטמוספרי ובטמפרטורה $110^\circ C$, $\kappa = 1.0126$. ערכים טיפוסיים בנוזלים ובמוצקים הם בתחום 2 עד 6. לגופרית ולזכוכית פיירקס $\kappa = 4$, ולפוליאתילן 2.3. למרבה ההפתעה, הקבוע הדיאלקטרי היחסי למים הוא 80 !

- המסקנה המתחייבת מן העובדות הנזכרות היא שבתווך דיאלקטרי השדה החשמלי נחלש. הרי $C = Q/V$, ואם הקיבול עולה (לאותו מטען) פירוש הדבר שהמתח יורד. אבל, בקבל לוחות, $V = Ed$, ומכאן $E = E_0/\kappa$, או

$$E = \frac{\sigma}{\kappa\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad . \qquad (4.22)$$



אנו רוצים להבין מה "באמת" קורה בתווך דיאלקטרי בהשפעת שדה חשמלי.

- אלקטרוני ההולכה במוליך חופשיים לנוע בהשפעת שדה חיצוני, ומסתדרים על שפת התווך עד שהשדה בתווך מתאפס. לעומת זאת, בתווך מבודד כל האלקטרונים קשורים, ואינם חופשיים לנוע. נדון אפוא באטום בתווך מבודד. הגרעין החיובי, הנקודתי למעשה, מוקף ענן כדורי של אלקטרונים שליליים. המטען הכולל מתאפס, וכיוון שהתפלגות האלקטרונים בעלת סימטרייה כדורית, הרי כלפי חוץ האטום נייטרלי מבחינה חשמלית. בהשפעת שדה חיצוני האטום מתעוות: על הגרעין פועל כוח בכיוון השדה, ועל כל אלקטרון בכיוון נגדי. באופן איכותי אפשר לדבר על העתקה יחסית של הגרעין ביחס למרכז הכובד של ענן האלקטרונים כהחלקה של סריג חיובי ביחס לסריג שלילי. באין שדה חיצוני שני הסריגים חופפים, ואילו עם הפעלת השדה מופיעה תנועה יחסית, כמתואר בתרשים. התוצאה היא שעל פני השפה החיצונית הניצבת לשדה, בצד שבכיוון השדה, מופיע עודף מטען חיובי, ועל פני השפה הנגדית עודף מטען שלילי. השכבה הכפולה הזאת משרה שדה נגדי, המחליש את השדה בתווך:

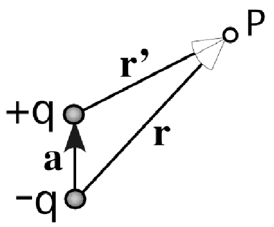
$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon} \quad . \qquad (4.23)$$

כאמור, הניסיון מלמד שהקבוע κ אינו תלוי בעוצמת השדה E_o. פירוש הדבר שההזזה היחסית (בתרשים) מתכונתית לעוצמת השדה.

- כדי להבין מה קורה בתווך דיאלקטרי בהשפעת שדה חשמלי חיצוני, נזכיר שכל התפלגות מטען, רחוקה מסימטרייה כדורית ככל שתהיה, נוהגת כלפי חוץ, במרחק רב מתחום ההתפלגות, כמטען נקודתי. אולם אם המטען הכולל מתאפס, היא נוהגת כדיפול חשמלי, לאמור כזוג מטענים $\pm q$ במרחק a זה מזה. מה שמאפיין את ההתפלגות (רחוק ממנה) הוא מומנט הדיפול שלה $\vec{p} = q\vec{a}$, מקום שמגמת הווקטור היא מהמטען השלילי לחיובי. נותר לנו אפוא לברר מהו

השדה שמשרה דיפול חשמלי

- בזמנו דנו בשדה החשמלי שמשרה דיפול, ובפוטנציאל שממנו נגזר השדה, אבל הגבלנו את עצמנו להתנהגות השדה והפוטנציאל רק לאורך ציר הדיפול. עתה נחזור לנושא בלי ההגבלה. נדון אפוא בזוג מטענים $\pm q$, שהמרחק ביניהם a, ונברר מה השדה המושרה על-ידי מערכת מטען כזאת. נעיין בתרשים ונמצא שעל-פי הסימון המופיע בו הפוטנציאל בנקודה P הוא



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right) \quad . \tag{4.24}$$

ועוד נניח כי $r' \approx r >> a$. פירוש הדבר שאכן אנו מעונינים רק בשדה החשמלי בתחום הרחוק מהדיפול. בכתיב וקטורי, ועם מגמות הווקטורים המוגדרות בתרשים, נקרב עתה

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a} \quad \Rightarrow \quad r' = \sqrt{r^2 + a^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{a}} \approx r\sqrt{1-\frac{2}{r^2}\vec{r}\cdot\vec{a}} \approx r\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^2}\right) \quad . \tag{4.25}$$

בשוויונות מקורבים אלה הזנחנו את $(a/r)^2$ לעומת a/r. ועתה, על-סמך הביטוי (המקורב) שמצאנו עבור r', אנו מסיקים כי

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\left(\frac{1}{1-\vec{r}\cdot\vec{a}/r^2}-1\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \quad . \tag{4.26}$$

נזכור את הגדרת מומנט הדיפול: $\vec{p} = q\vec{a}$. אם ננצל מונח זה, נוכל לבטא את הפוטנציאל בתור

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{x^3} \quad . \tag{4.27}$$

הפוטנציאל של השדה החשמלי המושרה על-ידי דיפול נחלש עם המרחק כמו $1/r^2$ (עד עתה היינו מורגלים לפוטנציאלים היורדים כמו $1/r$), ועל כן השדה עצמו נחלש כמו $1/r^3$. במישור קו המשווה של הדיפול הפוטנציאל מתאפס, הוא חיובי מעל למישור, ושלילי תחתיו. השדה החשמלי ניצב אפוא למישור קו המשווה של הדיפול, ומכוון כלפי מטה, לאמור הוא "אנטי-מקביל" לדיפול ורק לאורך ציר הדיפול השדה מקביל לדיפול. תיאור איכותי של השדה המושרה על-ידי דיפול, באמצעות קווי השדה, מופיע בעמוד 28.

שדה הקיטוב ושדה צפיפות השטף החשמלי

- דנים בתווך מבודד, בדיאלקטריקון. בהשפעת שדה חשמלי חיצוני מופיעים בו המוני דיפולים אלמנטריים. אפשר אפוא לדבר על צפיפות המומנט הדיפולי הכולל בתווך, או במילים אחרות על שדה הקיטוב:

$$\vec{P}(\vec{x}) = \ell im\frac{\sum \vec{p}_n}{V} \qquad .... \quad V \to 0 \quad . \tag{4.28}$$

על סמך ההגדרה הזאת אפשר לומר שמומנט הדיפול הכולל באלמנט נפח נתון הוא

$$d\vec{P} = \vec{P}(\vec{x})d^3x \quad . \tag{4.29}$$

נזכיר שפוטנציאל השדה המושרה על-ידי דיפול $\vec{p}$ הוא $\varphi(\vec{x})=\vec{p}\cdot\vec{x}/\left(4\pi\varepsilon_0 x^3\right)$. אולם לצורך הדיון הבא נוח יהיה לנצל את הזהות המתמטית הבאה:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\vec{u}_r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{u}_r}{r^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\vec{x}}{x^3}=-\nabla\left(\frac{1}{x}\right)\ . \tag{4.30}$$

על-סמך זהות זאת נוכל לבטא את פוטנציאל השדה המושרה על-ידי מערכת הכוללת התפלגות מטען ("חופשי") $\rho_0(\vec{x})$ ותווכים דיאלקטריים בנוסחה

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int\frac{\rho_0(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}-\int\vec{P}(\vec{x}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'\right)\ . \tag{4.31}$$

את האינטגרל השני באגף ימין אפשר לבטא באופן שונה. ננצל תחבולה פשוטה, המובנת כמעט מאליה, לאמור את הזהות

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\ , \tag{4.32}$$

מקום אשר ∇' מציין גזירות לפי רכיבי הווקטור $\vec{x}'$, ולא לפי רכיבי $\vec{x}$. על-סמך זהות זאת אפשר לרשום את הפוטנציאל שבו אנו דנים בתור

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int\frac{\rho_0(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+\int\vec{P}(\vec{x}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'\right)\ . \tag{4.33}$$

עוד ננצל את הזהות הווקטורית

$$\nabla\cdot\left(a\vec{V}\right)=\vec{V}\cdot\nabla a+a\nabla\cdot\vec{V}\ . \tag{4.34}$$

הוכחת הזהות פשוטה ביותר באמצעות מה שקרוי "כתיב הציונים":

$$a\vec{V}\equiv aV_n\ ,\ \nabla\cdot\vec{V}\equiv V_{n,n}\quad\Rightarrow\quad\left(aV_n\right)_{,n}=a_{,n}V_n+aV_{n,n}\ . \tag{4.35}$$

על-סמך הזהות הזאת אפשר עתה להביע את הפוטנציאל הנדון בתור

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int\frac{\rho_0(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'+\int\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)d^3x'-\int\frac{\nabla\cdot P(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'\right)\ . \tag{4.36}$$

האינטגרל השני באגף ימין מתאפס, על-סמך משפט הדיברגנץ. האינטגרל המרחבי של הדיברגנץ המופיע באינטגרל שווה לאינטגרל המשטחי של הווקטור עצמו על-פני המעטפת של התחום המרחבי, ואם הנפח מכיל את כל המערכת החומרית, אזי על-פני המעטפת מתאפס שדה הקיטוב. ואילו האינטגרל השלישי דומה לראשון, עם $-\nabla\cdot\vec{P}(\vec{x}')$ במקום $\rho_0(\vec{x}')$. הנה כי כן, הפוטנציאל המבוקש הוא הפוטנציאל המקובל בשדה המושרה על-ידי התפלגות המטען הכולל: $\rho=\rho_0+\rho_P$.

- הזיהוי $\rho_P=-\nabla\cdot\vec{P}$ מעורר בעייה מסוימת. אם נדון בלוח דיאלקטרי המוכנס לשדה חשמלי אחיד $\vec{E}_0$ בניצב לשדה, אז גם בלוח ישרור שדה אחיד $\vec{E}=\vec{E}_0/\kappa$. גם שדה הקיטוב יהיה

אחיד, ועל כן הדיברגנץ שלו יתאפס בכל מקום. לפי זה נסיק כי $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$, וכי לכאורה מקורות השדה יהיו רק המטענים החופשיים, שאת צפיפותם ציינו בתור ρ_0. מובן שלא זה המצב, שכן אנו יודעים שמטעני הקיטוב יופיעו על שפות הלוח הדיאלקטרי. מה אפוא צפיפות המטען המשטחית σ_P?

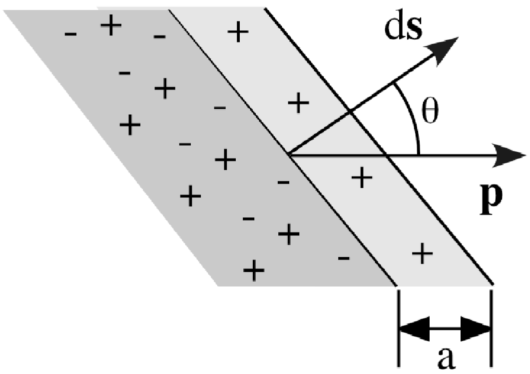
- נחזור אל תמונת הקיטוב, ונאמר כי מדובר בתווך חד-אטומי המאופיין על-ידי המספר האטומי Z. לפי המודל הפשטני, בהשפעת שדה חשמלי חיצוני, כל אטום מקוטב הוא דיפול, זוג מטענים נקודתיים $\pm Ze$ וזרוע מסוימת a. הסריג החיובי מחליק על-פני הסריג השלילי, וההזזה היחסית היא a. ועוד נניח שהצפיפות המספרית של האטומים בתווך היא N. מכאן שעל-פני צד הלוח שבו בולט הסריג החיובי מופיעה צפיפות המטען

$$\sigma_P = Ze \cdot N \cdot a = p \cdot N = P \quad . \tag{4.37}$$

על-פני הצד הנגדי, שבו בולט הסריג השלילי, נמצא כי $\sigma_P = -P$. המטען המושרה, מטען הקיטוב, המופיע על-פני אלמנט השפה d^2S הוא אפוא

$$\sigma_P d^2S = \pm P\, d^2S = \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad . \tag{4.38}$$

ביטוי הגודל הזה כמכפלה הסקלרית $\vec{P} \cdot d\vec{S}$ מבטיח את הסימן הנכון של אלמנט המטען על-פני השפה.



- עתה נראה שהטענה כי המטען על-פני אלמנט שטח הוא אכן $\vec{P} \cdot d\vec{S}$ גם אם שפת הדיאלקטריקון אינה ניצבת לשדה הקיטוב. לשם זה נעיין בתרשים. על נקלה מתברר כי (שוב!)

$$\sigma_P = Ze \cdot N \cdot a \cos\theta = \ \dots \ = \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad . \tag{4.39}$$

קיצורו של דבר, באופן הכללי ביותר אנו קובעים שאם בתווך דיאלקטרי מושרה שדה קיטוב $\vec{P}$, ואם $\vec{u}$ הוא ניצב היחידה החיצוני על שפת התווך, אז צפיפות מטען הקיטוב על-פני השפה היא תמיד

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{u} = P_{nor} \quad . \tag{4.40}$$

- אנו דנים בפוטנציאל השדה החשמלי במערכות הכוללות גם תווכים דיאלקטריים. נחזור למשפט גאוס. לאור דיונינו ברור עתה כי

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_0 + \rho_P}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 - \nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_o} \quad , \tag{4.41}$$

או, בצורה מוצלחת יותר,

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_0 \quad . \tag{4.42}$$

כאשר דנו בשדות חשמליים בריק, קבענו שהמטען החופשי, ρ_0, הוא מקור שדה צפיפות השטף החשמלי, $\vec{D}$. כדי לשמור על ניסוחו של משפט גאוס, לאמור על $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$, מכלילים את הגדרת השדה $\vec{D}$ לתווכים חומריים בהתאם לנוסחה האחרונה, כלומר

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad . \tag{4.43}$$

לפי תיאורנו האיכותי, וכמתאשר מן הניסיון (בדרך כלל), הקיטוב מתכונתי לשדה החשמלי השורר בתווך הדיאלקטרי: $\vec{P} = \chi \vec{E}$, מקום שהמקדם χ ("חַי") ידוע ככושר הקיטוב של התווך. את הקשר הזה נציג במשוואה האחרונה, ונקבל

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 + \chi)\vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad . \tag{4.44}$$

מצאנו אפוא את הקשר בין הקבוע הדיאלקטרי של תווך כלשהו לבין כושר הקיטוב של התווך. הקשר בין הקבוע הדיאלקטרי היחסי לבין כושר הקיטוב הוא, כמובן,

$$\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \chi = (\kappa - 1)\varepsilon_o \quad . \tag{4.45}$$

- כדי להמחיש את הנאמר, נדון למשל בפחמן ארבע-כלורי ($C\,C\ell_4$), נוזל המשמש בניקוי יבש ובכיבוי אש. נתוני החומר הזה המתייחסים לענייננו הינם

$$Z = 6 + 17 \times 4 = 74 \ . \quad M = 12 + 36 \times 4 = 156 \ , \quad \rho = 1.6 \, \frac{gr}{cm^3} \ , \quad \kappa = 2.24 \quad . \tag{4.46}$$

אם על דגימה של הנוזל מפעילים שדה חשמלי שעוצמתו $E = 10^7 \ volt/m$, שדה חזק למדי הקרוב לשדה הפריצה, אז

$$P = (\kappa - 1)\varepsilon_0 E \ , \quad N = \frac{L\rho}{M} \times 10^6 \ ; \quad p = \frac{P}{N} \ , \quad a = \frac{p}{Ze} = 1.5 \times 10^{-15} m = 1.5 \ fermi \tag{4.47}$$

מתברר שההזזה מזערית. ומה עוצמת הדיפול האלמנטרי המושרה במולקולה של הנוזל הנדון? –

$$p = a \cdot Ze = \left(1.5 \times 10^{-15}\right)(74)\left(1.6 \times 10^{-19}\right) = 1.8 \times 10^{-32} \ coul \cdot m \quad . \tag{4.48}$$

לשם השוואה נזכיר את החומרים הפולריים, שהמולקולות שלהם בעלות מומנט דיפול קבוע, שהוא מסדר הגודל:

$$p \approx e \times 1 \ \text{Å} \ \approx 10^{-29} \ coul \cdot m \tag{4.49}$$

ואומנם, מומנט הדיפול של מולקולת מים הוא 6×10^{-30} קולון-מטר, לאמור כפי 300 מהמומנט המושרה בנוזל הלא-פולרי בשדה חזק מאוד.

<u>תנאי השפה של השדה החשמלי</u>

- הבעייה היא בעצם מה קורה לשדה החשמלי במעבר מתווך בעל קבוע דיאלקטרי מסוים לתווך בעל קבוע אחר. בטבע אין אי-רציפויות, ומה שיש הם שינויים חריפים. אולם בטיפול מקרוסקופי אפשר לדון במעבר חריף על-פני שכבה דקה מאד בקירוב של אי-רציפות מתמטית.

- מה קורה אפוא, קודם כל, לשדה $\vec{D}$ במעבר מתווך לתווך? נצא ממשפט גאוס, $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, שפירושו המעשי הוא

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, d^3x \quad . \tag{4.50}$$

המשטח הסגור S שבו נדון הוא גליל שבסיסיו משני צידי השפה המבדילה בין שני התווכים הדיאלקטריים, ומקבילים לה. אם גובה הגליל זניח בהשוואה לממד הקווי של הבסיסים, אפשר להזניח את השטף החשמלי דרך המעטפת, ובהנחה ששטח כל בסיס הוא יחידה, וכי המגמה של ניצב היחידה היא מהתווך הראשון לשני, מוצאים כי

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{u}_n \approx \int_V \rho \, d^3x \quad . \tag{4.51}$$

וכאשר גובה הגליל שואף לאפס, האינטגרל המרחבי מתאפס, והמסקנה המתקבלת היא

$$D_{n2} = D_{n1} \quad , \tag{4.52}$$

לאמור, רכיב השדה $\vec{D}$ הניצב לשפה בין התווכים חייב להיות רציף במעבר מתווך אל תווך. אולם אם יש על-פני השפה מטען חופשי, $\sigma \neq 0$, או אז

$$D_{n2} = D_{n1} + \sigma \quad . \tag{4.53}$$

ואשר לשדה העוצמה החשמלית $\vec{E}$, שהוא שדה משמר, לאמור שדה שעבורו $\oint \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0$, נדון במסילה מלבנית הניצבת לשפה המבדילה בין שני תווכים שונים. אם רוחב המלבן שואף לאפס, ושתי הצלעות הארוכות משני צידי השפה, אזי ברור כי

$$E_{t2} = E_{t1} \quad . \tag{4.54}$$

זאת אומרת שלגבי השדה $\vec{E}$ דווקא הרכיב המקביל (המשיק) לשפה הוא הרכיב הרציף במעבר מתווך לתווך.