פרופ' יהודה ייבין וד"ר ניר שביב
מכון רקח לפיזיקה .

חשמל ואופטיקה לתלמידי ביולוגיה. (תשס"ד).

פרק שלישי: הפוטנציאל והאנרגיה בשדה החשמלי

הפוטנציאל האלקטרו-סטטי

- מושג האנרגיה הפוטנציאלית של חלקיק חומרי בשדה כבידה מוכר מהמכניקה. גם בחשמל מגדירים את המושג האנלוגי. בעצם כבר הגדרנו את המושג הזה בקובענו שהאנרגיה הנדרשת כדי להביא מטען נקודתי q מ"אינסוף" ולהציבו בנקודה $\vec{x}$, בשדה המושרה על-ידי N מטענים נקודתיים q_n הקבועים בנקודות $\vec{x}_n$ היא

$$W = W(q,\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{\left|\vec{x}-\vec{x}_n\right|} \quad . \tag{3.1}$$

אנרגיה זאת ליחידת מטען, לאמור האנרגיה הדרושה כדי להסיע מטען יחידה מ"אינסוף" אל $\vec{x}$, מוגדרת כפוטנציאל של השדה החשמלי, או בקיצור כפוטנציאל החשמלי, בנקודה $\vec{x}$. הפוטנציאל הוא שדה סקלרי, והוא מצוין כמקובל בתור $\varphi(\vec{x})$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{\left|\vec{x}-\vec{x}_n\right|} \quad . \tag{3.2}$$

ומשמדובר בהתפלגות מטען רציפה, הפוטנציאל החשמלי המושרה על-ידה הוא

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}d^3x' \quad . \tag{3.3}$$

מכל מקום, הקשר בין האנרגיה לפוטנציאל, בדומה לקשר בין הכוח לשדה, הוא

$$W(q,\vec{x}) = q\,\varphi(\vec{x}) \quad . \tag{3.4}$$

- נדון בפוטנציאל החשמלי בשדה המושרה על-ידי ישר אינסופי הטעון בצפיפות קווית אחידה λ (קולון למטר). את השדה עצמו כבר חישבנו, הן במישרים והן על-סמך משפט גאוס. עלינו להעריך אפוא את האינטגרל (ראה התרשים והמלל בסעיף "השדה החשמלי המושרה על-ידי ישר אינסופי טעון בצפיפות אחידה," עמוד 18)

$$\varphi(r) = 2\int_0^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{r^2+x^2}} \quad . \tag{3.5}$$

אולם האינטגרל הזה מתבדר! ההגדרה שבחרנו לפוטנציאל, כאנרגיה הדרושה כדי להסיע מטען יחידה מ"אינסוף" לנקודה בשדה החשמלי הנתון, תופסת רק אם המטענים המשרים את השדה

מוגבלים לתחום סופי. במערכת הנדונה כרגע, הישר האינסופי הטעון, אין להגדרה משמעות. הרי אנו יודעים שהשדה מתכונתי לערך ההופכי של המרחק מהישר, $E \propto 1/r$, ומובן שהאינטגרל

$$\int_r^\infty \frac{dr'}{r'} = \ell n\, r'\Big|_r^\infty = \infty \tag{3.6}$$

אינו מוגדר, לאמור האינטגרל הזה חסר משמעות.

- את האפס של הפוטנציאל אפשר לקבוע בכל נקודה $\vec{x}_0$ שהיא, ולאו דווקא באינסוף, כיוון שמה שמעניין באמת הוא הפרש הפוטנציאל בין נקודות שונות. במילים אחרות, הפוטנציאל מעניין רק עד כדי קבוע. אין אפוא כל מניעה להגדיר את הפוטנציאל כאינטגרל הקווי

$$\varphi(\vec{x}) = -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{E}(\vec{x}')\cdot d\vec{x}' = \int_{\vec{x}}^{\vec{x}_0} \vec{E}(\vec{x}')\cdot d\vec{x}' \quad . \tag{3.7}$$

זאת בעצם ההגדרה היסודית של הפוטנציאל – כאינטגרל קווי – ואילו הגדרתו כאינטגרל מרחבי מבוססת אף היא על ההגדרה שלו כאינטגרל קווי. נשאלת אפוא השאלה לגבי מסילת האינטגרציה. אולם ברור מראש כי למושג הפוטנציאל יש משמעות רק אם האינטגרציה אינה תלויה במסילה! ואכן, השדה האלקטרו-סטטי הוא שדה משמר. אילמלא היה מדובר בשדה משמר, אי-אפשר היה להגדיר פוטנציאל.

- נחזור לבעייה שטרם פתרנו: קביעת הפוטנציאל החשמלי בשדה המושרה על-ידי ישר אינסופי טעון. לפי ההגדרה האחרונה הפוטנציאל הוא

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E(r')dr' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^{r_0}\frac{dr'}{r'} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ell n\left(\frac{r_0}{r}\right) \tag{3.8}$$

- כדוגמה נוספת נחשב את הפוטנציאל בשדה המושרה על-ידי קליפה כדורית הטעונה בצפיפות (משטחית) אחידה. יהי R רדיוס הקליפה. אז קודם כל מחוץ לקליפה

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{r_0}\frac{dr'}{(r')^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right) \quad .... \quad r, r_0 \ge R \quad . \tag{3.9}$$

בכל מקרה שהדבר אפשרי מקובל לבחור $r_0 = \infty$. במקרה הנדון המטען מוגבל לתחום סופי, ואין כל בעייה לנקוט בבחירה זאת, ואנו מסיקים אפוא כי:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & .... \quad r \ge R \\ \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R} & \quad r < R \end{cases} \quad . \tag{3.10}$$

ראוי שנרשום כאן גם את השדה החשמלי המושרה על-ידי הקליפה הטעונה:

$$E(r)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} & .... \quad r\geq R \\ 0 & r<R\end{cases} \quad . \tag{3.11}$$

מה שראוי לציון הוא שבעוד השדה עצמו אינו רציף על-פני הקליפה, r = R, הפוטנציאל רציף על פניה. בעצם, הפוטנציאל רציף תמיד!

<u>הדיפול החשמלי: השדה והפוטנציאל לאורך ציר הדיפול</u>

- נדון בשדה ובפוטנציאל של זוג מטענים נקודתיים הנושאים מטענים שווים בגודלם ושונים בסימניהם: $\pm q$. את המרחק ביניהם נציין בתור 2a. מערכת כזאת נקראת דיפּוֹל (לאמור דו-קוטב) חשמלי. המרחק 2a ידוע בתור הזרוע של הדיפול, ואת הדיפול מקובל לציין כווקטור $\vec{p}$, שעוצמתו $p=2qa$, כיוונו הציר המחבר את שני המטענים ומגמתו מן המטען השלילי אל החיובי. הבה נברר אפוא מה השדה שמשרה הדיפול לאורך צירו. נבחר את ציר הדיפול כציר x, ואת הראשית במרכז הדיפול. אז (עבור $x>a$)

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{1}{(x+a)^2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4xa}{\left(x^2-a^2\right)^2} \quad . \tag{3.12}$$

אך יתברר בהמשך שמעניין יותר לברר מה השדה עבור $x>>a$, לאמור רחוק מאוד מהדיפול עצמו. בתחום הרחוק ברור כי a^2 זניח בהשוואה אל x^2, ועל כן בתחום הרחוק, לאורך הציר ערכו של השדה החשמלי הוא בקירוב

$$E\approx\frac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3} \quad . \tag{3.13}$$

הנה כי כן, מתברר שבתחום הרחוק השדה החשמלי שמשרה הדיפול משתנה כמו $1/x^3$, ולא כמו $1/x^2$ במקרה ה"מצוי" של השדה המושרה על-ידי מטען נקודתי. ואשר לפוטנציאל, על נקלה מתברר כי, בתחום הרחוק מהדיפול, ולאורך הציר,

$$\varphi(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{x^2-a^2}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^2} \quad . \tag{3.14}$$

בהמשך הדברים נדון בהרחבה בקשר בין השדה לפוטנציאל, ובינתיים, בהקשר לדיונינו בדיפול, נקדים ונציין שכל עוד אנו דנים במה שקורה לאורך ציר הדיפול הרי ברור כי $\varphi=-\int Edx$, לאמור כי $d\varphi=-Edx$, ומכאן אנו מסיקים כי $E=-d\varphi/dx$. ואכן ברור כי כאשר גוזרים את הפוטנציאל, משוואה (3.14), מתקבל בדיוק השדה החשמלי של משוואה (3.13).

<u>יחידות הפוטנציאל: היחידה המוחלטת והיחידה המעשית – הוולט</u>

- הבה נחזור ונדון ביחידות הפוטנציאל. הפוטנציאל, כפי שציינו זה עתה, הוא אנרגיה (או עבודה) ליחידת מטען. יחידת הפוטנציאל היא אפוא "אנרגיה חלקי מטען." לכן היחידה המעשית היא

ג'אול לקולון, ושם ניתן לה: וולט. ועוד נציין הפעם שהיחידה המוחלטת היא, כמובן מאליו, ארג ליא"ס. היחס בין שתי היחידות הוא

$$volt = \frac{joule}{coul} = \frac{10^7 erg}{3\times 10^9 esu} = \frac{1}{300}\frac{erg}{esu} \quad . \tag{3.15}$$

<u>הלחץ על משטחים טעונים</u>

- נחזור ונדון בקליפה הכדורית הטעונה בצפיפות (משטחית) אחידה. אלמנטי המטען השונים דוחים כמובן זה את זה, ואילו היתה הקליפה גמישה היא היתה מתנפחת. יש אפוא עניין להעריך את הלחץ על-פני הקליפה הטעונה. בתוך הקליפה השדה החשמלי מתאפס, ואילו בצידה החיצוני, ממש על פניה, עוצמת השדה היא

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad , \tag{3.16}$$

מקום שכמובן R הוא רדיוס הקליפה. פירוש הדבר שכל קווי השדה שמקורם באלמנט שטח d^2S מסויים, ובעצם באלמנט המטען $\sigma\, d^2S$, פורצים החוצה, כולם בצידו החיצוני של האלמנט, וניצבים לו כמובן. הלחץ, לאמור הכוח הפועל על יחידת שטח, אמור להיות לכאורה $P = \sigma E = \sigma^2/\varepsilon_0$, ואולם מייד ניווכח שלא זה הכוח.

- עד כמה ששכבת המטען דקה, הריהי בעלת עובי סופי מסויים. התיאור האידיאלי של השדה, כבעל אי-רציפות על-פני הקליפה הכדורית, הוא אומנם קירוב מצוין של המציאות, אך בדיקה מדוקדקת יותר תעלה שגם השדה רציף, וערכו עולה מאפס בצידה הפנימי של שכבת המטען לערך המלא בצידה החיצוני. ה"קפיצה" אינה קפיצה ממש, אלא עלייה רציפה עם המעבר דרך השכבה.

- נחלק את קליפת המטען לשורת קליפות משנה, ונדון בלחץ הפועל על אחת מהן, שרדיוסה r ועוביה dr. השדה החשמלי ברדיוס r מתחייב רק מהמטען הכלוא בכדור שרדיוסו r, שאותו נציין בתור $q(r)$. ואת הצפיפות המשטחית המתאימה נציין בתור $\mu(r) = q(r)/\left(4\pi r^2\right)$. יהי R הרדיוס הפנימי של שכבת המטען שבה אנו דנים, ויהי עוביה dR. ברור כי אז $\mu(R) = 0$ וכי $\mu(R+dR) = \sigma$. מכל מקום, צפיפות המטען בקליפת המִשנה שלנו היא (כמובן)

$$\mu(r+dr) - \mu(r) = \mu'(r)dr \quad . \tag{3.17}$$

והלחץ עליה הוא אפוא

$$dP = \frac{1}{\varepsilon_0}\mu(r)\mu'(r)dr \quad . \tag{3.18}$$

הנה כי כן מתברר שהלחץ הכולל על הקליפה הטעונה הוא

$$P = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_R^{R+dR}\mu(r)\mu'(r)dr = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{\sigma}\mu\, d\mu = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad . \tag{3.19}$$

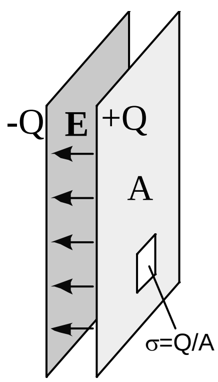
- אם הטיעון בדיון הקודם, והחישובים המסתמכים עליו אינם משכנעים, אפשר לנצל את מושג האנרגיה, שקבענו שהוא כה נוח, ולהוכיח את המסקנה האחרונה על-סמך שיקול שונה לחלוטין.

ככלל, תמיד מאלף לפַתח תוצאה בדרך נוספת, ובמיוחד כאשר דרך זאת פשוטה יותר. נחזור אפוא לבעיית הלחץ P על קליפה כדורית טעונה בצפיפות אחידה. הכוח הפועל על השכבה הטעונה כולה הוא $F = 4\pi R^2 P$. אם נרצה להקטין את רדיוס הקליפה נצטרך להשקיע עבודה, והאנרגיה הפוטנציאלית של הקליפה תגדל. נזכיר שהאנרגיה של קליפה כדורית טעונה היא $W = Q^2 / (8\pi\varepsilon_0 R)$ (משוואה (2.28)). משנקטין את הרדיוס בשיעור dR, יהיה השינוי באנרגיה $dW = -FdR$, ומכאן

$$F = -\frac{dW}{dR} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{4\pi R^2} = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{F}{4\pi R^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad . \tag{3.20}$$

נציין כי תוצאה זאת כללית ביותר. בכל מקרה שבו דנים בצפיפות מטען משטחית, והשדה מוגבל לצד אחד של שכבת המטען, כמו למשל על-פני מוליך טעון כלשהו, או בקבל לוחות טעון, הלחץ על השכבה הטעונה יהיה תמיד $\sigma^2/2\varepsilon_0$.

<u>קבל הלוחות וצפיפות האנרגיה בשדה החשמלי</u>



- עתה נדון בקבל לוחות: שני מישורים מוליכים מקבילים, שהאחד נושא מטען Q+ והאחר נושא Q–. נתעלם מהשפעות השפה, מהעובדה שהלוחות סופיים, ונתייחס אליהם כלוחות "אינסופיים." טיפול כזה מוצדק אם המרחק בין הלוחות קטן (מאוד!) בהשוואה לממדיהם הקוויים. בהנחה זאת תהיה צפיפות המטען על-פני כל לוח אחידה. יהי A השטח של כל לוח. אז צפיפות המטען האחידה על-פניו תהיה $\sigma = Q/A$. השדה החשמלי בין הלוחות ניצב להם, אחיד, וערכו $E = \sigma/\varepsilon_0$. מחוץ ללוחות השדה מתאפס.
- יהי x המרחק בין הלוחות. אז המתח (≡ הפרש הפוטנציאלים) ביניהם יהיה

$$V = \int \vec{E}\cdot d\vec{x} = E\cdot x = \frac{\sigma x}{\varepsilon_0} = \frac{x}{\varepsilon_0}\frac{Q}{A} \quad . \tag{3.21}$$

האנרגיה החשמלית של המערכת, של הקבל, תהיה

$$W = \int_0^Q V(q)dq = \frac{x}{\varepsilon_0 A}\int_0^Q q\,dq = \frac{xQ^2}{2\varepsilon_0 A} = xA\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad . \tag{3.22}$$

- הלוחות נמשכים זה אל זה. הכוח הפועל ביניהם הוא

$$F = \frac{dW}{dx} = A\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad , \tag{3.23}$$

ועל כן הלחץ על כל מישור הוא אכן, כמצופה,

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad . \tag{3.24}$$

- בכל הנאמר עד כאן בעניין קבל הלוחות אפשר לעיין מנקודת השקפה שונה. את בעיית האנרגיה בקבל ננסח בצורה אחרת: נשאל מהי האנרגיה הדרושה ליצירת השדה החשמלי בתחום המרחבי שבין הלוחות. עם טעינת הקבל מופיע בין הלוחות שדה חשמלי שעוצמתו $E=\sigma/\varepsilon_0$. נפח התחום שבו מתקיים השדה הוא xA. אפשר אפוא לומר, ואין זאת אלא דרך דיבור בלבד, שכדי ליצור שדה כזה בנפח יחידה האנרגיה הדרושה היא

$$u=\frac{W}{xA}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad . \tag{3.25}$$

למרבה הפליאה הרי זה בדיוק הלחץ הפועל על כל לוח של הקבל. עניין זה מפליא פחות לכשנציין שלצפיפות האנרגיה וללחץ בדיוק אותו ממד:

$$[u]=\frac{joule}{m^3}\ ,\quad [P]=\frac{newton}{m^2}=\frac{newton\cdot m}{m^3}=\frac{joule}{m^3} \quad . \tag{3.26}$$

בין כה וכה, מדברים על צפיפות האנרגיה בשדה החשמלי, כאשר הכוונה היא לאנרגיה, ליחידת נפח,.הדרושה ליצירת השדה הנדון. אולם משמעות יש רק לאנרגיה הכוללת "של השדה," שהיא בעצם האנרגיה הכוללת של מערכת המטען המשרה את השדה. ואשר לקבל הלוחות שבו אנו דנים, נציין עוד כי את צפיפות האנרגיה בשדה החשמלי המושרה בין הלוחות אפשר לבטא גם בתור

$$u=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2=\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad . \tag{3.27}$$

<u>העוצמה החשמלית וצפיפות השטף החשמלי</u>

- השדה $\vec{E}$ מציין את הכוח הפועל על מטען יחידה בשדה החשמלי. מכאן ואילך, ולמען הדיוק, נכנה שדה זה בשם שדה העוצמה החשמלית. וזאת משום שנוח להגדיר שדה וקטורי נוסף, הצמוד לשדה $\vec{E}$, הוא השדה

$$\vec{D}\equiv\varepsilon_0\vec{E} \quad . \tag{3.28}$$

לפני שנבחן הגדרה זאת, ונברר מדוע כדאי לדון בשדה "מלאכותי" זה, נציין כי באמצעותו מתבטאת צפיפות האנרגיה בשדה החשמלי בתור

$$u=\tfrac{1}{2}\,\vec{D}\cdot\vec{E} \quad , \tag{3.29}$$

ומשפט גאוס בתור

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho\, d^3x \quad . \tag{3.27}$$

שטף השדה $\vec{D}$ דרך משטח נתון נקרא השטף החשמלי דרך המשטח, והשדה $\vec{D}$ עצמו נקרא על כן שדה צפיפות השטף החשמלי. הנה כי כן מתברר שדווקא שדה זה הוא השדה הטבעי לניסוח משפט גאוס. באמצעותו מנוסח המשפט בקביעה שהשטף החשמלי דרך משטח סגור שווה למטען הכלוא בתוכו. עוד נציין כי שדה צפיפות השטף החשמלי מכונה לפרקים (בעיקר בספרי לימוד מיושנים) בשם שדה ההעתקה החשמלית (Electric Displacement).

- לבסוף נתייחס עוד ליחידות (המעשיות) של שדה העוצמה החשמלית ושל שדה צפיפות השטף החשמלי:

$$[E]=\frac{volt}{m}\ ,\quad [D]=\frac{coul}{m^2}\quad . \tag{3.28}$$

<u>הגרדיינט של שדה סקלרי</u>

- המושג "שדה משמר" אמור להיות מוכר משיעורי המכניקה. שדה וקטורי $\vec{A}$ הוא שדה משמר, בתחום מרחבי (פשוט קשר) מסוים, אם לגבי כל מסילה סגורה בתחום מתקיימת הזהות

$$\oint \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}=0\quad . \tag{3.29}$$

לאינטגרל הקווי לאורך מסילה סגורה קוראים צירקולציה, או בעברית עִרבּוּל (מונח שעדיין אינו מקובל על כולם). המשפט המתבטא בנוסחה האחרונה קובע כי הערבול של שדה משמר מתאפס באופן זהותי. פירוש הדבר הוא שכל אינטגרל קווי של וקטור משמר תלוי רק בנקודת המוצא ובנקודת הסיום, ולא במסילה. מכאן מתחייב גם שלכל שדה משמר אפשר לייחס פוטנציאל, שדה סקלרי, הנקבע עד כדי קבוע, לאמור את הפונקציה

$$\varphi(\vec{x})=-\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{x}\quad . \tag{3.30}$$

הסימן מינוס המופיע לפני האינטגרל שרירותי לחלוטין, אך זה ההסכם המקובל.

- נציג עתה את השאלה ההפוכה: איך אפשר לייחס לשדה סקלרי נתון, שדה וקטורי כזה שהשדה הסקלרי יהיה הפוטנציאל שלו? מהמשוואה האחרונה נובע הקשר $d\varphi=-\vec{A}\cdot d\vec{x}$. אולם

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{u}_z\right)\cdot d\vec{x}\quad . \tag{3.31}$$

כדי לוודא שהמשוואה הזאת אכן נכונה, אם רכיבי הווקטור $d\vec{x}$ קטנים דיים, נדון במקרה $\varphi=\varphi(x,y)$. או אז

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(x+dx,y+dy)-\varphi(x,y)\\ &=[\varphi(x+dx,y+dy)-\varphi(x,y+dy)]+[\varphi(x,y+dy)-\varphi(x,y)] \end{aligned} \tag{3.32}$$

נדון תחילה בביטוי בסוגריים המרובעים הראשונים באגף ימין. צריך להיות ברור כי אינו אלא

$$\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x,y+dy)]dx=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y)dy\right]dx=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dxdy\approx\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx \tag{3.33}$$

ואשר לביטוי בסוגריים המרובעים האחרים במשוואה (3.32), מובן מאליו כי הוא $(\partial\varphi/\partial y)dy$. ההכללה של תוצאה זאת לשלושה ממדים מיידית, ובזאת הוכח כי אכן המשוואה (3.31) תקפה. נחזור למשוואה הזאת. משנגדיר את האופרטור הווקטורי

$$\nabla\equiv\vec{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{u}_z\frac{\partial}{\partial z}=\sum_{n=1}^{3}\vec{u}_n\frac{\partial}{\partial x_n}\quad , \tag{3.34}$$

אפשר יהיה לרשום הביטוי עבור $d\varphi$ בתור

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\vec{x} \quad . \tag{3.35}$$

מצאנו אפוא שהשדה הווקטורי המבוקש, אשר $\varphi(\vec{x})$ הוא הפוטנציאל שלו, הוא $-\nabla\varphi$. לאופרטור ∇ קוראים "נַבְּלָה, או "דֶל," והשדה $\nabla\varphi$ נקרא "הגרדיינט של φ."

- עם הגדרת $\nabla\varphi$ כווקטור שרכיביו שלוש הנגזרות החלקיות של $\varphi(\vec{x})$, הוכחנו גם שהגרדיינט הוא אכן שדה וקטורי, שהרי לא כל שלוש פונקציות שרירותיות מהוות רכיבים של שדה וקטורי! הפונקציות $\partial^2\varphi/\partial x_n^2$, למשל, אינן רכיבים של וקטור (מדוע?). כיוון שהגרדיינט הוא שדה וקטורי, חזקה עליו שיש לו גם משמעות גיאומטרית טהורה, שאינה תלויה במערכת השיעורים שבה אנו בוחרים להביעו. לבירור העניין נתאר לעצמנו כדור זעיר שרדיוסו r ומרכזו בנקודה $\vec{x}$, שבה ערך הפונקציה (או השדה הסקלרי) הנדונה הוא $\varphi(\vec{x})$. מה השינוי בערך הפונקציה כאשר עוברים מהנקודה $\vec{x}$ אל נקודה כלשהי על-פני הכדור? על-סמך הדיון הקודם, ובסימון שבו נקטנו, צריך להיות ברור כי

$$d\varphi = \nabla\varphi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad \ldots. \quad |d\vec{x}| = r \quad . \tag{3.36}$$

מובן מאליו שהשינוי המירבי הוא בכיוון המקביל לווקטור $\nabla\varphi$. ומכאן שבכל נקודה כיוון הגרדיינט של $\varphi(\vec{x})$ הוא הכיוון שבו השינוי של φ מירבי, והעוצמה, לאמור הערך המוחלט של הגרדיינט, היא השינוי המירבי ליחידת אורך.

- אפשר לסכם את דיוננו בקביעה ששדה משמר נגזר תמיד מפוטנציאל, וכי הגרדיינט של שדה סקלרי הוא שדה וקטורי משמר. מה שחשוב הוא ששדה וקטורי משמר מאופיין בעצם על-ידי פונקציה מרחבית אחת, ואין צורך בשלוש פונקציות לשם הגדרתו.

- ואשר לשדה העוצמה החשמלית המושרה על-ידי מערכת מטען קבועה (בזמן), לאמור השדה האלקטרו-סטטי, הרי כל מה שאפשר לומר עליו מתמצה בקשרים הבאים

$$\vec{E} \;\Rightarrow\; \varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{E} = -\nabla\varphi \quad . \tag{3.37}$$

<u>המשטחים שווי-הפוטנציאל</u>

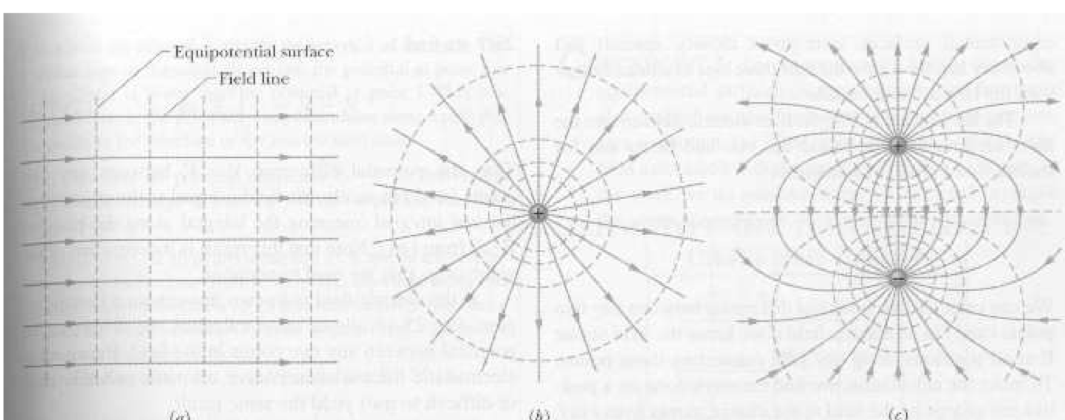


FIGURE 25-3 Electric field lines (purple) and cross sections of equipotential surfaces (gold) for (a) a uniform field, (b) the field of a point charge, and (c) the field of an electric dipole.

- כפי שאנו יודעים, השדה בתוך גוף מוליך, הנמצא בשיווי משקל סטטי, מתאפס. ברור אפוא שכאשר נעים בתוך המוליך הפוטנציאל אינו משתנה. המוליך הוא אפוא תווך שווה-פוטנציאל, ופני המוליך הינם משטח שווה פוטנציאל. הנה כי כן, המתח בין שתי נקודות על פני המשטח שהמרחק ביניהן $d\vec{x}$ הוא כמובן מאליו $d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0$. ברור אפוא שהשדה החשמלי על-פני המשטח שווה הפוטנציאל ניצב למשטח.
- במערכת כלשהי המשרה שדה אלקטרו-סטטי כבר דנו בהמחשת השדה החשמלי באמצעות קווי השדה. לתיאור השדה נוכל להוסיף עתה את המשטחים שווי הפוטנציאל. דרך כל נקודה בשדה עובר קו שדה, ומשטח שווה פוטנציאל. הקווים והמשטחים ניצבים אלה לאלה. ברור למשל כי השדה בקבל לוחות אחיד וניצב ללוחות. מכאן שהמשטחים שווי הפוטנציאל בקבל כזה הם מישורים המקבילים ללוחות הקבל. וכן ברור שסביב מטען נקודתי קווי השדה הם הקרניים (הישרים דרך המטען) והמשטחים הם הכדורים שמרכזם במטען. בתרשים בראש הסעיף מופיעה גם מערכת קווי השדה והמשטחים שווי הפוטנציאל של דיפול. ואשר לשדה המושרה על-ידי ישר טעון בצפיפות אחידה, כאן קווי השדה ניצבים לישר הטעון וחותכים אותו, ואילו המשטחים שווי הפוטנציאל הם הגלילים החד-מרכזיים שצירם מתלכד עם הישר.
- ראוי להדגיש כי, כפי שנאמר בזמנו, צפיפות קווי השדה מציינת את עוצמת השדה החשמלי. בדומה לזה צריך להיות ברור שאם מערכת המשטחים שווי הפוטנציאל נבחרת באופן שהפרש הפוטנציאל בין משטחים שכנים קבוע, אז ככל שהשדה חזק יותר כן יהיו המשטחים צפופים יותר.