פרופ' יהודה ייבין וד"ר ניר שביב.
מכון רקח לפיזיקה

חשמל ואופטיקה לתלמידי ביולוגיה. (תשס"ד).

<u>פרק שני</u>: השדה החשמלי ומשפט גאוס.

<u>חוק קולון ויחידות המטען החשמלי</u>

- נקודת המוצא לכל דיונינו בתורת החשמל היא העובדה. המתחייבת מן הניסויים, שהכוח בין שני מטענים "נקודתיים," q_1 ו- q_2, במרחק r זה מזה, נתון בקשר

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad . \tag{2.1}$$

זאת אומרת שהכוח מתכונתי למכפלת המטענים ולערך ההופכי של ריבוע המרחק ביניהם. אולם את מקדם המתכונת נוכל לקבוע רק אחרי אימוץ שיטת היחידות. אך הואיל והמטען הוא גודל חדש עבורנו, קודם כל עלינו לקבוע לו יחידה.

- הגם שהסכמנו לאמץ את שיטת היחידות המעשיות, יש עניין להזכיר את שיטת היחידות המוחלטות, הלוא היא שיטת cgs, הידועה גם כשיטה של גאוס. בשיטה זאת משמש חוק קולון עצמו להגדרת יחידת המטען: אם הרוחק בין שני מטענים שווים שווים הוא ס"מ, והכוח הפועל ביניהם הוא דין, או אז כל מטען הוא מטען יחידה. פירוש ההגדרה שהמקדם בנוסחה שרשמנו ערכו יחידה, וסימן המתכונת מוחלף בסימן השוויון. היחידה שהגדרנו נקראת יחידת מטען אלקטרו-סטטית, ובקיצור יא"ס (בלועזית esu). הבה נברר מה הממד של יחידת המטען המוחלטת:

$$F = \frac{q^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad (esu)^2 = dyne \cdot cm^2 = \left(gr \cdot cm \cdot \sec^{-2}\right) \cdot \left(cm^2\right) = cm^3 \cdot gr \cdot \sec^{-2} \tag{2.2}$$

$$\therefore \qquad [esu] = cm^{3/2} gr^{1/2} \sec^{-1} \tag{2.3}$$

היחידות המוחלטות היו מקובלות בפיזיקה, והן מקובלות עד היום על פיזיקאים רבים. אולם העובדה שהממדים של היחידות החשמליות, כמו ממד היא"ס שרשמנו זה עתה, הן חזקות לא שלימות של יחידות היסוד, מספיקה כדי לפקפק בנוחיותה. מכל מקום, בשנת 1948 המליצה ועדה בינלאומית שנתכנסה לשם כך על אימוץ שיטת היחידות המעשיות (שיטת MKSA). יחידת המטען המעשית היא הקולון :

$$1 coul = 2.998 \times 10^9 \; esu \approx 3 \times 10^9 \; esu \quad . \tag{2.4}$$

- איך מתבטא חוק קולון ביחידות המעשיות? – נחזור ונרשום את החוק ביחידות המוחלטות

$$F(dyne)=\frac{q^2(esu^2)}{r^2(cm^2)} \quad . \tag{2.5}$$

היחידות המעשיות המקבילות הן

$$newton=10^5\ dyne,\ \ coul=3\times10^9\ esu,\ \ m=10^2\ cm \quad . \tag{2.6}$$

השוויון המספרי, בין האגפים במשוואה המביעה את חוק קולון ביחידות המוחלטות, יישמר אם נדאג לגורמים המתאימים לשערי החליפין בין היחידות, לאמור

$$F(newton)\times10^5=\frac{q^2(coul^2)\times(9\times10^{18})}{r^2(m^2)\times10^4} \quad . \tag{2.7}$$

הנה כי כן, ביחידות המעשיות חייב חוק קולון להיות

$$F=9\times10^9\,\frac{q_1q_2}{r^2} \quad . \tag{2.8}$$

מסיבות שתתבהרנה בהמשך הדברים נהוג לסמן את המקדם המספרי בתור $1/(4\pi\varepsilon_0)$. הקבוע ε_0 נקרא הקבוע הדיאֶלֶקטרי של הריק.

- מהמשוואה האחרונה אנו יודעים לבטא את הכוח הפועל בין שני מטענים נקודתיים ביחידות המעשיות. אולם כוח הוא וקטור ומלבד עוצמתו (או ערכו המוחלט) יש לו גם כיוון (ומגמה!). חוק קולון הינו בעצם

$$\vec F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1\,q_2}{|\vec x_2-\vec x_1|^3}(\vec x_2-\vec x_1) \quad . \tag{2.9}$$

כדי לדייק יותר, הרי מה שרשמנו הוא הכוח הפועל על המטען q_2 , הנמצא בנקודה x_2, בגלל נוכחות המטען q_1 בנקודה x_1 . כמקובל נסמן כוח זה בתור $\vec F_{21}$. ואז הכוח הפועל על q_1 בגלל נוכחות q_2 בנקודה x_2 הוא (כמובן!) $\vec F_{12}=-\vec F_{21}$.

- שאלה המתבקשת כמעט מאליה מתייחסת לכוח הפועל על מטען (נקודתי) נתון בנוכחות כמה מטענים. הניסיון מלמד שכוח זה הוא הסכום הווקטורי של הכוחות שהיו פועלים על המטען הנתון בגלל כל אחד מהמטענים האחרים אילו היה קיים רק הוא לבדו. זה עקרון ההרכבה שכבר הזכרנו, ומשמעות הדבר שמה שידוע אודות הכוח בין שני מטענים מספיק כדי לדעת מה הכוחות הפועלים בין מספר מטענים כלשהו. מובן מאליו שהחשיבות המעשית של עקרון ההרכבה רבה מאוד. בלשון הפיזיקה מתמצה עניין זה בקביעה שהכוח החשמלי הוא כוח דו-גופי. מכל מקום, ניסוחו הכללי של חוק קולון מתייחס לכוחות הפועלים בין N מטענים q_n, הקבועים בנקודות $\vec x_n$ (מקום אשר n=1,2,…,N). הכוח הפועל על המטען q_m במערכת המטענים הנתונה הוא

$$\vec F_m=\frac{q_m}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n\neq m}\frac{q_n}{|\vec x_m-\vec x_n|^3}\ (\vec x_m-\vec x_n) \quad . \tag{2.10}$$

וצריך להיות ברור כי הציון הרץ n עובר על-פני כל הערכים מ–1 עד N, חוץ מאשר על-פני הערך $n=m$.

- חוק קולון הינו בעצם כל תורת החשמל כולה, ואידך זיל גמור! ואומנם, לו יכולנו להסתמך על תורת היחסיות (המצומצמת), כי אז נתן היה לגזור את כל תורת החשמל והמגנטיות המתחייבת מחוק קולון לבדו. אולם הואיל ועניין זה הוא הרבה מעבר למסגרת שיעורנו הנוכחי אנו נדון בארבעה חוקי יסוד, המבוססים על הניסיון, ומהם נסיק את כל הדרוש לנו בהרצאה על חשמל ומגנטיות.

השדה החשמלי

- נעיין במשוואה האחרונה. ממנה מתברר שהכוח הפועל על מטען יחידה בנקודה $\vec{x}_m$, והמכונה השדה החשמלי (המושרה על-ידי N–1 המטענים האחרים הקבועים במקומותיהם הנתונים), הוא

$$\vec{E}\left(\vec{x}_m\right)=\frac{\vec{F}_m}{q_m}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n\neq m}\frac{q_n}{\left|\vec{x}_m-\vec{x}_n\right|^3}\left(\vec{x}_m-\vec{x}_n\right)\quad . \tag{2.11}$$

נוחיות המושג החדש הזה ברורה כמעט מאליה. קודם לכל משום שאז הכוח הפועל על מטען כלשהו בנקודה (כלשהי) $\vec{x}$ יהיה

$$\vec{F}\left(q,\vec{x}\right)=q\,\vec{E}\left(\vec{x}\right)\quad . \tag{2.12}$$

ושנית, משום שבדרך כלל משמתעניינים בכוח שיפעל על מטען נתון בנקודה מסויימת, אז מעניין רק השדה החשמלי באותה נקודה. פחות מעניינת מערכת המטענים המשרה את השדה, ומה גם שמערכות מטען שונות עשויות להשרות בדיוק אותו שדה בנקודה המסויימת.

- נדון עתה ביחידות שבהן נמדד השדה החשמלי. השדה הוא הכוח הפועל על יחידת מטען. לשון אחר, השדה הוא "כוח חלקי מטען." מכאן שהיחידה המעשית של עוצמת השדה החשמלי היא "ניוטון חלקי קולון," והיחידה המוחלטת " דין חלקי יא"ס." נציין שהיחס בין היחידות הללו הוא:

$$\frac{newton}{coul}=\frac{10^5\,dyne}{3\times10^9\,esu}=\frac{1}{3}\times10^{-4}\,\frac{dyne}{esu}\quad . \tag{2.13}$$

ועוד נעיר שלא אלה היחידות המקובלות לעוצמת השדה החשמלי. אם כי איננו יודעים עדיין מהו מתח (או פוטנציאל) חשמלי ומהי היחידה (הוולט) שבה מודדים אותו, הרי באנלוגיה למה שאנו אמורים לדעת מהמכניקה:

כוח × דרך = עבודה = פוטנציאל × מסה ,

כן בתורת החשמל

$$\text{newton}\times\text{meter}=\text{joule}=\text{volt}\times\text{coul}\quad .$$

ואומנם, היחידה המקובלת של עוצמת השדה החשמלי היא

$$\frac{newton}{coul}=\frac{volt}{m}\quad . \tag{2.14}$$

למען השלמות והסדר הטוב נזכיר כאן גם את היחידה המוחלטת המקובלת לשדה החשמלי. במקרה זה נוכל לרשום כי

$$\frac{dyne}{esu}=\frac{esu^2}{cm^2}\frac{1}{esu}=\frac{esu}{cm^2} \quad . \tag{2.15}$$

ליחידה הזאת קוראים "גאוס," והיחס בינה לבין היחידה המעשית הוא (כמובן!)

$$gauss=3\times 10^4\,\frac{volt}{m} \quad . \tag{2.16}$$

- עלינו להתוודע למושג "התפלגות מטען רציפה." עד כה דנו במערכות של מטענים נקודתיים – בדידים. ואומנם במציאות כאלה הם המטענים. האלקטרון והפרוטון הינם אל נכון מטענים נקודתיים בקירוב מצוין. המטען של חלקיקים אלמנטריים אלה, המטען היסודי, שכל מטען בטבע הוא כפולה שלימה שלו, הוא

$$e=1.6\times 10^{-19}\,coul=4.8\times 10^{-10}\,esu \quad . \tag{2.17}$$

אבל אנו עוסקים בתופעות מַקרוסקופיות, וכשם שאנו דנים בזורם (נוזל או גז) כרצף, אף-על-פי שהזורם מורכב מפרודות, ממסות נקודתיות, הרי גם בתורת החשמל נדון במטען כרצף. הטיפול מוצדק כיוון שבנפחים האלמנטריים שבהם נדון יהיה מספר המטענים היסודיים עצום ורב.

- את צפיפות המטען נציין בתור $\rho(\vec{x})$. צפיפות זאת היא פונקציה רציפה של שלושת המשתנים המרחביים, ומשמעותה שהמטען באלמנט הנפח $dV=dxdydz=d^3x$ סביב הנקודה $\vec{x}$ הוא

$$dq=\rho(\vec{x})d^3x \quad . \tag{2.18}$$

השדה המושרה על-ידי התפלגות מטען רציפה (וקבועה בזמן) יהיה אפוא

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x' \quad . \tag{2.19}$$

<u>האנרגיה של מערכת מטען</u>

- כאמור, חוק קולון הוא כל תורת החשמל כולה, ממש כשם שחוק הכבידה של ניוטון (יחד עם משוואות התנועה שלו) הוא המכניקה כולה. אולם נוח ויעיל ביותר להגדיר מושגים נוספים, מושגים נגזרים (במובן זה שאינם מושגי יסוד), המאפשרים פתרון בעיות סבוכות, וגם מאירים תובנות נוספות של הבעיות שבהן נדון. בין המושגים הנוספים, מעבר למושג הכוח שרק הוא דרוש להבנת חוק קולון, ראש וראשון הוא מושג האנרגיה.

המושג אנרגיה מוכר היטב מהמכניקה. ואשר לחשמל, הבה נברר מה האנרגיה האצורה במערכת מטען נתונה. לשון אחר, מה העבודה הדרושה להרכבת המערכת. אם האנרגיה שלילית, פירוש הדבר שיש להשקיע עבודה בפירוק המערכת. ובכן נדון במצב התחלתי שבו נתונים N מטענים רחוקים (מאוד!) זה מזה. אנו אומרים שהמטענים ב"אינסוף," הן לגבינו והן כל אחד לגבי כל האחרים.

- כדי להביא את המטען הראשון q_1 לנקודה $\vec{x}_1$, לא נדרשת כל עבודה. נרשום לפנינו כי $W_1 = 0$. אולם כדי להביא את המטען השני q_2 לנקודה $\vec{x}_2$, בנוכחות המטען q_1 בנקודה $\vec{x}_1$, צריך להיות ברור כי

$$W_2 = -\int_{\infty}^{\vec{x}_2} \vec{F}_{21}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{x}_2}^{\infty} \frac{q_1 q_2}{\left|\vec{x}-\vec{x}_1\right|^3}(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot d\vec{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_{12}}^{\infty}\frac{q_1 q_2}{r^2}dr \tag{2.20}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad .$$

הצעד הבא הוא הצבת המטען q_3 בנקודה $\vec{x}_3$, בנוכחות שני המטענים הקודמים כל אחד במקומו הנתון. העבודה הנדרשת לפעולה זאת היא

$$W_3 = -\int_{\infty}^{\vec{x}_3} \vec{F}_3(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_3}^{\infty}\left[\vec{F}_{31}(\vec{x}) + \vec{F}_{32}(\vec{x})\right]\cdot d\vec{x} = \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \quad . \tag{2.21}$$

וכך יש להמשיך עד הבאת המטען האחרון q_N למקומו הנתון $\vec{x}_N$. בסך הכל צריך להיות מובן כי

$$W = \sum_{n=1}^{N} W_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{q_m q_n}{\left|\vec{x}_m - \vec{x}_n\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{m,n=1\\ m<n}}^{N}\frac{q_m q_n}{\left|\vec{x}_m - \vec{x}_n\right|} \tag{2.22}$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{N}\frac{q_m q_n}{\left|\vec{x}_m - \vec{x}_n\right|} \quad .$$

<u>דוגמה: האנרגיה של קליפה כדורית טעונה בצפיפות אחידה</u>

- לפי הדיון הקודם ברור כי האנרגיה של התפלגות רציפה נתונה $\rho(\vec{x})$ היא

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|} d^3x\, d^3x' \quad . \tag{2.23}$$

נציין כי כאן מדובר באינטגרציה שש-ממדית, המשתרעת על פני המרחב כולו, ולמעשה על-פני אותו תחום מרחבי שבו הצפיפות אינה מתאפסת.

- ואשר לבעיית הקליפה הטעונה, כמקובל נציין את צפיפות המטען המשטחית (האחידה) בתור σ, היינו σ קולון הוא המטען לכל מ"ר על-פני הכדור. האינטגרל שעלינו להעריך הוא אפוא

$$W = \frac{\sigma^2}{8\pi\varepsilon_0}\oint_{|\vec{x}|,|\vec{x}'|=R}\frac{d^2S\, d^2S'}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|} \tag{2.24}$$

כאן מציינת הלולאה סביב סימן האינטגרציה כי מדובר באינטגרציה על-פני משטח סגור. וכן ברור שהפעם מדובר באינטגרל ארבעה ממדי. כן ברור כי R הוא רדיוס הקליפה הכדורית הנדונה.

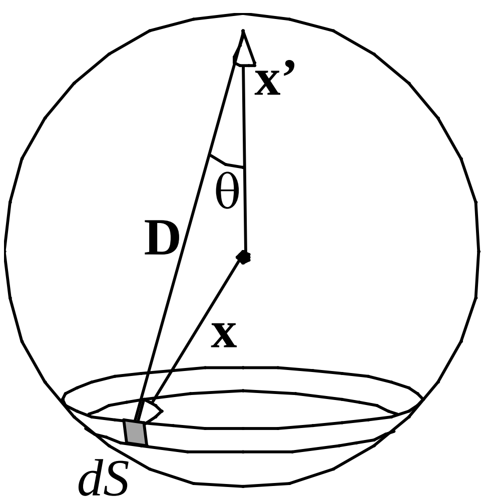
- תחילה נדון באינטגרל לפי d^2S, לאמור כאשר $\vec{x}$ משתנה, ואילו $\vec{x}'$ קבוע:

$$W = \frac{\sigma^2}{8\pi\varepsilon_0}\oint d^2S' \oint \frac{d^2S}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|} \quad . \tag{2.25}$$

האינטגרל הפנימי תלוי לכאורה בערך של $\vec{x}'$, אולם במחשבה שנייה מתברר כי מטעמי סימטרייה (!) אין זה כך. אכן לכל ערך של $\vec{x}'$ זה בדיוק אותו אינטגרל עצמו. האינטגרל על-פני d^2S' אינו אפוא אלא שטח הכדור: $\oint d^2S' = 4\pi R^2 = S$. כן ברור כי $\sigma S = Q$ הוא המטען הכולל על-פני הקליפה הכדורית שלנו. הנה כי כן, בינתיים צמצמנו את האינטגרל המרובע לאינטגרל הכפול

$$W = \frac{\sigma Q}{8\pi\varepsilon_0}\oint\frac{d^2S}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{S}\oint\frac{d^2S}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad . \tag{2.26}$$

- כדי להעריך את האינטגרל נציין $|\vec{x}-\vec{x}'| = D$, ונעיין בתרשים. ראשית ברור כי $D = 2R\cos\theta$. ואשר לאלמנט השטח, נבחר את הטבעת סביב הציר $\vec{x}'$ הכוללת את הנקודה $\vec{x}$. אורכה הוא $2\pi D\sin\theta$, ורוחבה, כפי שלא קשה לברר, הוא $Dd\theta/\cos\theta = 2Rd\theta$. וזאת משום שהרוחב הוא קשת על-פני הכדור, לאמור ניצבת לציר $\vec{x}$, ואילו ה"קשת" $Dd\theta$ ניצבת לקו D. והזווית בין השניים היא אכן θ. עלינו לברר אפוא מה הערך של האינטגרל הדו-ממדי, ואומנם



$$\oint\frac{d^2S}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \int_0^{\pi/2} 4\pi R\sin\theta\, d\theta \tag{2.27}$$

$$= 4\pi R\int_0^1 d(\cos\theta) = 4\pi R = \frac{S}{R}.$$

ומכאן שהאינטגרל המבוקש הוא ("בסופו של דבר")

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R} \quad . \tag{2.28}$$

<u>משפט גאוס</u>

- נדון עתה במושג שכבר נזכר במבוא, והוא השטף של שדה וקטורי דרך משטח. אבל ראשית עלינו להסכים איך לייצג אלמנט שטח: מקובל לייחס לַאלמנט וקטור מייצג, שעוצמתו שווה לשטח האלמנט וכיוונו ניצב לאלמנט. נשארת הבעייה באשר למגמת הווקטור המייצג. משמדובר במשטח סגור מוסכם שצידו החיצוני הוא הצד החיובי. במקרים אחרים נקבעת המגמה לפי ההקשר, ומכל מקום תמיד חייב להיות ברור מה המגמה.
- מושג השטף שאול מתורת הזרימה. אם השדה הווקטורי מייצג את שדה המהירויות בזורם אי-דחיס, אפשר לשאול מה נפח הזורם העובר דרך אלמנט שטח מסוים ביחידת זמן. מובן שאם האלמנט ניצב לכיוון הזרימה, אז נתון הנפח המבוקש, לאמור השטף, על-ידי $\mathrm{v}\,d^2S$. ואם אין המהירות ניצבת לאלמנט אז $d\Phi = \vec{\mathrm{v}}\cdot d\vec{S}$. האות היוונית Φ היא כמובן הסימון המקובל לשטף.

החתך של שפופרת הזרימה הוא ההיטל של אלמנט השטח על המישור הניצב למהירות. ומכל מקום, המסקנה היא שהשטף של שדה $\vec{v}$ (כלשהו!) דרך משטח נתון S הוא

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, d^2S \quad . \tag{2.29}$$

מובן מאליו שכאן $\vec{n}$ הוא וקטור יחידה בכיוון הווקטור המייצג את אלמנט השטח. ראוי להזכיר בהקשר זה את המוסכמה להמחשת שדה וקטורי באמצעות קווי שדה. לפי ההסכם צפיפות הקווים (מספרם ליחידת שטח הניצבת לכיוון השדה) שווה לעוצמת השדה. או אז נוכל לקבוע כי השטף של שדה דרך משטח אינו אלא מספר קווי השדה ה"דוקרים" את המשטח. ונזכיר את העובדה, המובנת כמעט מאליה, והמתייחסת לשדה המהירויות של זורם אי-דחיס: בתחום חסר מקורות שטף השדה דרך משטח סגור תמיד מתאפס.

- נחזור לענייננו, לאמור לדיון בשדה האלקטרו-סטטי, הוא השדה החשמלי המושרה על-ידי מערכת מטען קבועה, שאינה משתנה בזמן. מה אפשר לומר בזיקה לשטף של השדה הזה דרך משטח סגור? נדון בבעייה פשוטה ביותר: נקיף מטען נקודתי q בכדור שמרכזו במטען ורדיוסו r, ונברר מה השטף החשמלי דרך הכדור:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint d^2S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad . \tag{2.30}$$

מתברר אפוא שהתוצאה אינה תלויה כלל ברדיוס הכדור. עובדה זאת מתחייבת מחוק קולון! $\left(E \propto 1/r^2\right)$. אילו לא היה חוק קולון מדויק, היה השטף שבו אנו דנים תלוי ברדיוס הכדור. ועוד נציין כאן שהתוצאה שהישגנו היא הסיבה לקביעת המקדם בחוק קולון בתור $1/\left(4\pi\varepsilon_0\right)$. התוצאה לגבי השטף דרך הכדור סביב המטען ביחידות המוחלטות היא (כמובן) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi q$

- אנו טוענים עתה שהמשטח הסגור המקיף מטען נקודתי אינו חייב להיות דווקא כדור שמרכזו במטען. השטף החשמלי דרך כל משטח סגור המקיף מטען נקודתי q הוא q/ε_0, כיוון שמספר קווי השדה הדוקרים אותו אינו משתנה. גם בהמחשה של שדה המהירויות של זורם אי-דחיס המסקנה הזאת ברורה מאוד, שכן נפח הזורם העובר דרך משטח סגור המקיף מקור נקודתי אינו תלוי בצורת המשטח. הנה כי כן, אנו מגיעים למסקנה כי בשדה המושרה על-ידי מטען נקודתי q השטף החשמלי, דרך משטח סגור כלשהו, נתון בנוסחה

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & \text{.... אם המטען בתוך המשטח} \\ \\ 0 & \text{'' מחוץ '' ''} \end{cases} \tag{2.31}$$

- ומה בקשר לשדה החשמלי המושרה על-ידי מערכת הכוללת N מטענים נקודתיים? לפי עקרון ההרכבה $\vec{E} = \sum \vec{E}_n$, ועל כן מובן כמעט מאליו כי (פרט למקדם המספרי!) השטף החשמלי דרך משטח סגור הוא סכום המטענים בתוכו:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_n \quad . \tag{2.32}$$

מקום שהסכום מתייחס למטענים בתוך המשטח, ואינו כולל את אלה שמחוצה לו, וכן יש לשים לב שמדובר כאן בסכום האלגברי של המטענים. מטען שלילי בתוך המשטח הסגור תורם שטף שלילי דרכו. ומשמדובר בהתפלגות מטען רציפה ברור עתה כי

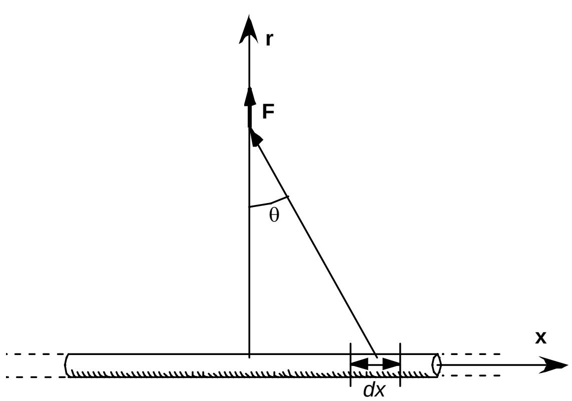
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \rho(\vec{x})d^3x \quad , \tag{2.33}$$

מקום שתחום האינטגרציה המרחבית V הוא הנפח הכלוא במשטח הסגור S. הזהות הזאת בין אינטגרל דו-ממדי על-פני משטח סגור לבין האינטגרל התלת-ממדי, המרחבי, על-פני התחום הכלוא במשטח, ידועה בתור משפט גאוס. למעשה משפט גאוס אינו אלא חוק קולון. משפט גאוס הוא ניסוח שונה של חוק קולון, של העובדה שהכוח החשמלי דו-גופי ונוהג לפי $1/r^2$. מכל מקום, כל עוד אנו עוסקים באלקטרו-סטטיקה, במטענים נחים, הרי זה בדיוק תוכנו של משפט גאוס.

- מדוע דרוש ניסוח נוסף לחוק קולון? – הניסוח החדש מוצלח הרבה יותר מהניסוח המקורי של חוק קולון לפחות משתי סיבות. ראשית מסיבה עקרונית (ליודעי חן!). כפי שנזכר במבוא, נכון חוק קולון רק באלקטרו-סטטיקה, ואילו משפט גאוס נכון תמיד. זה מתחייב מן העובדה הניסויית שהמטען החשמלי נשמר במעברי לורנץ, או בלשון אחר הוא שמורה יחסיותית. הסיבה השנייה מעשית: במקרים רבים מאפשר משפט גאוס לחשב את השדה החשמלי בקלות רבה, ואילו האינטגרציה הנדרשת לפי חוק קולון מסובכת למדי.

<u>השדה החשמלי המושרה על-ידי ישר "אינסופי" טעון בצפיפות אחידה</u>

- כדי להדגים את שימושיותו של משפט גאוס, נחשב את השדה המושרה על-ידי ישר "אינסופי" טעון בצפיפות (קווית!) אחידה λ קולון למטר. מטעמי סימטרייה ברור שהשדה רדיאלי, ותלוי רק במרחק r מהישר הטעון. נבחר נקודה מסויימת במרחק r מהישר הטעון. נוריד ממנה אנך אל הישר ונבחר בחיתוך האנך הזה עם הישר כראשית הצירים. את הישר הטעון נבחר כציר x. אז כל אלמנט dx סביב x נושא את המטען λdx



, ומשרה בנקודה הנבחרת בשדה את השדה החשמלי שעוצמתו

$$\left|d\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{R^2} \qquad .\,.\,.\,. \qquad R^2 = x^2 + r^2 \quad . \tag{2.33}$$

הווקטור המתאר את התרומה הזאת נמצא במישור התרשים. יש לו רכיב רדיאלי ורכיב צירי (מקביל לישר הטעון). האלמנט dx סביב הנקודה x– משרה בנקודה הנבחרת שדה בעל אותו רכיב רדיאלי,

אבל רכיבו הצירי מבטל את הרכיב הצירי שמשרה האלמנט סביב הנקודה +x ! על כן למעשה תורמים שני האלמנטים הסימטריים האלה לשדה הכולל, בכיוון הרדיאלי, את

$$dE = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{R^2}\cos\theta \quad . \tag{2.34}$$

עוצמת השדה הכולל – שכיוונו רדיאלי – היא אפוא

$$E = E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\cos\theta}{R^2}dx \qquad .... \qquad \theta = \theta(x),\ R = R(x). \tag{2.35}$$

מהתרשים ברור כי $r = R\cos\theta$, וכי $R\,d\theta = \cos\theta\, dx$. ועל כן

$$\frac{\cos\theta}{R^2}dx = \frac{\cos\theta}{r}d\theta \quad . \tag{2.36}$$

אנו מסיקים אפוא שעוצמת השדה המבוקשת נתונה על-ידי האינטגרל

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta \quad . \tag{2.37}$$

ערכו של האינטגרל (כמובן!) 1, והתוצאה המבוקשת היא, סוף סוף,

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \quad . \tag{2.38}$$

- ועתה הבה נבדוק איך מתקבלת תוצאה זאת בפשטות רבה ממשפט גאוס: נתאר לעצמנו גליל שצירו מתלכד עם הישר הטעון, ואשר רדיוסו r. כאמור, ברור שהשדה רדיאלי, וכי השטף החשמלי דרך כל יחידת גובה של הגליל הוא $2\pi r \cdot E(r)$. הואיל והמטען הכלוא ביחידת גובה של הגליל הוא λ, הרי שמתחייבת המסקנה

$$2\pi r E(r) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \quad . \tag{2.39}$$

<u>השדה החשמלי המושרה על-ידי התפלגות מטען בעלת סימטרייה כדורית</u>

- אנו דנים אפוא בהתפלגות מטען שבה הצפיפות תלויה רק במרחק מנקודה מסויימת, היא מרכז הסימטרייה: $\rho(\vec{x}) = \rho(r)$. ברור שגם השדה עצמו בעל סימטרייה כדורית, ותלוי רק במשתנה r. בעצם ברור שהשדה רדיאלי, וכי אם הצפיפות חיובית השדה "מביט" החוצה, לאמור מגמתו מהמרכז וכלפי חוץ.
- יהי $q(r)$ המטען הכלוא בכדור שרדיוסו r:

$$q(r) = \int_{|\vec{x}|\le r} \rho(\vec{x})\, d^3x \quad . \tag{2.40}$$

או אז, לפי משפט גאוס,

$$. \int_{|\vec{x}|=r} \vec{E}(\vec{x})\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \tag{2.41}$$

ומכאן התוצאה המבוקשת, שהיא

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r)}{r^2}\quad . \tag{2.42}$$

תוצאה זאת פירושה, בין השאר, שהתפלגות מטען בעלת סימטרייה כדורית משרה, מעבר לתחום שבו מפולג המטען, שדה חשמלי המתלכד עם השדה המושרה על-ידי מטען נקודתי במרכז הסימטריה. הנה כי כן, מושג המטען הנקודתי אינו כה מלאכותי, אפילו בהקשר הפיזיקה הקלסית, המַקרוסקופית, כאשר דנים בהתפלגויות רציפות.