פרופ' יהודה ייבין וד"ר ניר שביב
מכון רקח לפיזיקה

חשמל ואופטיקה לתלמידי ביולוגיה. (תשס"ד).

פרק עשירי: גלים אלקטרו-מגנטיים

גלים מישוריים בתווך דיאלקטרי

- נחזור ונסכם את מה שאנו יודעים בזיקה לגלים אלקטרו-מגנטיים. אך הפעם לא נדון בגלים בריק, אלא בתווך חומרי (מבודד) המאופיין על-ידי קבוע דיאלקטרי ε ועל-ידי פרמיאביליות μ. או אז כל מה שצריך לעשות במשוואות הוא לרשום ε ו-μ במקום ערכי הגדלים האלה בריק (ז"א בציון התחתי 0). בסופו של דבר, במקום משוואת הגלים שהשדה החשמלי מקיים בריק – משוואה (8.18) – נמצא כי בתווך דיאלקטרי חסר מטענים וזרמים השדה מקיים

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad . \qquad (10.1)$$

לאמור, בין השאר, שמהירות האור (ליתר דיוק מהירות הגלים האלקטרו-מגנטיים) בתווך החומרי היא

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c\sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}} \quad , \qquad (10.2)$$

ובמילים, מהירות האור בתווך חומרי (מבודד) היא המהירות בריק חלקי השורש של "הקבוע הדיאלקטרי היחסי כפול בפרמיאביליות היחסית."

- ועוד, במקום לדון בגל המישורי ש"ניחשנו" בזמנו, המתקדם בכיוון הציר x ואשר רכיבו החשמלי בכיוון הציר y ורכיבו המגנטי בכיוון הציר z, נדון בגל מישורי באופן כללי יותר. אם הגל מתקדם בכיוון כלשהו שנציין באמצעות וקטור היחידה $\vec{u}$, צריך להיות ברור שהתלות המרחבית של השדות החשמלי והמגנטי היא רק במשתנה קווי לאורך ציר המקביל לווקטור $\vec{u}$ במילים אחרות, התלות היא במשתנה $\vec{u}\cdot\vec{x}$. והארגומנט של הפונקציה המתארת את פרופיל הגל הוא

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\vec{u}\cdot\vec{x} - \mathrm{v}t\right) \equiv \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t \quad , \qquad (10.3)$$

מקום שהווקטור $\vec{k}$ נקרא וקטור הגל. ערכו המוחלט של וקטור הגל הוא, כמובן, $2\pi/\lambda \equiv 1/\lambdabar$. גודל זה נקרא מספר הגל. כפי שהסברנו בזמנו מספיק לדון בגלים הרמוניים. הגלים האלקטרו-מגנטיים הם גלים רוחביים. השדה החשמלי יהיה אפוא

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{u}_1 E_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t\right) \quad .... \quad \vec{u}_1\cdot\vec{k} = 0 \quad . \qquad (10.4)$$

לאמור, השדה החשמלי ניצב לכיוון התקדמות הגל. והשדה המגנטי יהיה

$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{u}_2 B_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \quad .... \quad \vec{u}_2=\vec{u}\times\vec{u}_1 \ . \tag{10.5}$$

נזכיר כי $\vec{u}$ הוא וקטור יחידה בכיוון התקדמות הגל, הכיוון של $\vec{k}$. אנו רואים אפוא כי שלושת הווקטורים $\vec{k}$, $\vec{u}_1$ ו-$\vec{u}_2$ מהווים שלשה ימנית.

<u>קיטוב הגלים האלקטרו-מגנטיים</u>

- נדון בגל המוגדר במשוואות (10.4) ו-(10.5). בגל כזה השדה החשמלי תמיד ובכל מקום הוא בכיוון המקביל לווקטור $\vec{u}_1$. ואם "נצלם" את פרופיל השדה החשמלי בזמן מסוים, נמצא כי הוא במישור המוגדר על-ידי הווקטורים $\vec{u}_1$ ו- $\vec{k}$. אנו אומרים אז שהגל מקוטב במישור הנזכר, וקוראים לקיטוב כזה קיטוב קווי.
- כדי לקבל מצבי קיטוב כלליים יותר, יהיה עלינו לדון בצירוף של שני גלים מישוריים הרמוניים, המתקדמים באותו כיוון ובעלי אותה תדירות, ומקוטבים קווית במישורים שונים, למשל:

$$\vec{E}=\left(E_{10}\vec{u}_1+E_{20}\vec{u}_2\right)\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \ . \tag{10.6}$$

אם שני הגלים המרכיבים הם שווי פזה, יהיה צירופם גל מקוטב קווית שמשרעתו וקיטובו הם

$$E_0\vec{u}=E_{10}\vec{u}_1+E_{20}\vec{u}_2 \ . \tag{10.7}$$

- אולם אם שני המרכיבים אינם שווי-פזה, לא יהיה צירופם מקוטב קווית! נדון במקרה הפשוט יחסית שבו מקדים המרכיב השני את הראשון ב- $90°$:

$$\vec{E}_2=\vec{u}_2E_{10}\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t+\tfrac{1}{2}\pi\right)=-\vec{u}_2E_{10}\sin(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t) \ . \tag{10.8}$$

כדי להבהיר היטב איזה מין גל הוא הצירוף הנדון, נבחר מערכת שיעורים קרטזית המתלכדת עם השלשה הימנית $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{k})$. מהמשרעת נשמיט את הציון ונסמנה בתור E. *או אז רכיבי השדה שלנו הם*

$$\begin{cases} E_x=E\cos(kz-\omega t) \\ \\ E_y=-E\sin(kz-\omega t) \end{cases} \ . \tag{10.9}$$

הואיל ומדובר בגל מישורי המתקדם בכיוון הציר z, נדון בנקודה כלשהי במישור $z=0$. בנקודה זאת משתנה השדה בזמן, ונתון בתור

$$\begin{cases} E_x=E\cos\omega t \\ E_y=E\sin\omega t \end{cases} \ . \tag{10.10}$$

פירוש הדבר שהשדה הוא בעל עוצמה קבועה E, ומסתובב במישור (x,y) בתדירות הזוויתית ω במגמה החיובית. באופטיקה אומרים שלגל כזה קיטוב מעגלי שמאלי, ובפיזיקה מודרנית אומרים שהגל בעל בורגיות (helicity) חיובית. אחרי הדיון הנוכחי צריך להיות ברור שאם המרכיב השני

<u>מפגר</u> ב- 90°, יהיה הצירוף גל בעל קיטוב מעגלי ימני. עוד נציין שאם המשרעות של שני המרכיבים אינן שוות נקבל גלים בעלי קיטוב אליפטי.

<u>תנאי שפה: חוקי ההחזרה של גל מישורי הניצב לשפה בין שני תווכים</u>

- עד כה עסקנו בגלים מישוריים המתפשטים בתווך אחיד המשתרע "על-פני המרחב כולו." אנו מתכוונים לעסוק במעבר מתווך אחד לתווך אחר, הנבדל ממנו בערכי הקבוע הדיאלקטרי והפרמיאביליות. וקודם לכל נחקור את המקרה הפשוט ביותר, כאשר גל מישורי נתקל בשפה מישורית המבדילה בין שני התווכים. יתר על כן, נדון במקרה שבו מישור השפה ניצב לכיוון התקדמות הגל. על סמך כל מה שאנו יודעים כבר אודות גלים מישוריים, צריך להיות ברור כי בתווך האחד חייב הגל להיות

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{u}_x E_1 \cos(k_1 z - \omega t) \\ \vec{B}_1 = \vec{u}_y \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}\, E_1 \cos(k_1 z - \omega t) \end{cases} , \qquad (10.11)$$

ובתווך השני

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = \vec{u}_x E_2 \cos(k_2 z - \omega t) \\ \vec{B}_2 = \vec{u}_y \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}\, E_2 \cos(k_2 z - \omega t) \end{cases} . \qquad (10.12)$$

בזמנו, בפרק הרביעי, ראינו מה תנאי השפה במעבר מתווך לתווך. קודם כל, בהיות השדה החשמלי משמר, רכיביו המשיקים לשפה המבדילה בין שני התחומים רציפים במעבר, לאמור $E_1 = E_2$. וכמו כן הגלים בשני התווכים בעלי אותה תדירות ובאותה פזה. גם הרכיבים המשיקים לשפה של השדה $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ עוברים ברציפות, לאמור $E_1\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} = E_2\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}$. ברור ששני התנאים יחד אינם יכולים להתקיים, ולבעיה אין כביכול פתרון. פירוש הדבר שהנחת המוצא שלנו, לאמור שהגלים נתונים במשוואות (10.11) ו-(10.12), אינה מתקבלת.

- ננסה אפוא להניח שהגל בתחום הראשון כולל גל פוגע וגל חוזר:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{u}_x \left[E_i \cos(k_1 x - \omega t) + E_r \cos(k_1 x + \omega t)\right] \\ \vec{B}_1 = \vec{u}_y \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \left[E_i \cos(k_1 x - \omega t) - E_r \cos(k_1 x + \omega t)\right] \end{cases} , \qquad (10.13)$$

ובתחום השני קיים הגל העובר:

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = \vec{u}_x E_t \cos(k_2 z - \omega t) \\ \vec{B}_2 = \vec{u}_y \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}\, E_t \cos(k_2 z - \omega t) \end{cases} . \qquad (10.14)$$

תנאי הרציפות של הרכיבים המשיקים של $\vec{E}$ ושל $\vec{H}$ במעבר יתבטאו עתה בתור

$$E_i + E_r = E_t \ , \quad (E_i - E_r)\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} = E_t\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \ . \qquad (10.15)$$

אם נציין את הקבוע $\sqrt{(\mu_1\varepsilon_2)/(\mu_2\varepsilon_1)}$, האופייני למעבר מהתווך הראשון לשני, בתור n', אז, כפי שקל לברר, תתקבלנה משרעות הגל החוזר והגל העובר בתור

$$E_r = \frac{1-n'}{1+n'} E_i \ , \quad E_t = \frac{2}{1+n'} E_i \ . \tag{10.16}$$

- נזכיר כי עוצמת הגל מתכונתית לריבוע משרעת השדה החשמלי, $I \propto E_0^2$. אם עוצמת הגל הפוגע נתונה, או אז עוצמת הגל החוזר היא

$$I_r = \left(\frac{1-n'}{1+n'}\right)^2 I_i \ , \tag{10.17}$$

אבל בבואנו לקבוע את עוצמת הגל העובר, באמצעות עוצמת הגל הפוגע, אנו חייבים להביא בחשבון כי שני אלה מתקיימים בתווכים חומריים שונים. על כן עלינו לפרט יותר ולהזכיר שבעצם $I \propto \sqrt{\varepsilon/\mu}\, E_0^2$, ומכאן מתברר כי

$$I_t \propto \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\, E_t^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\, \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}} \left(\frac{2}{1+n'}\right)^2 E_i^2 \quad \Rightarrow \quad I_t = \frac{4n'}{(1+n')^2} I_i \ . \tag{10.18}$$

מה שמאלף בחישוב הזה הוא שמקדם ההחזרה ומקדם ההעברה מסתכמים ליחידה, כפי שאכן אמור להיות.

<u>פגיעה שאינה ניצבת של גל מישורי בשפה מישורית</u>

- אנו עוברים עתה לדון במקרה הכללי יותר של פגיעת הגל המישורי שאינה ניצבת למישור השפה בין שני התווכים השונים. אנו מבינים שהבעייה היא קביעת הגל החוזר והגל העובר בהינתן הגל הפוגע. יהי אפוא הגל הפוגע

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \vec{E}_{i0} \cos\left(\vec{k}_i \cdot \vec{x} - \omega t\right) \\ \vec{B}_i = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}\, \left(\vec{k}_1 / k_i\right) \times \vec{E}_i \end{cases} , \tag{10.19}$$

הגל החוזר

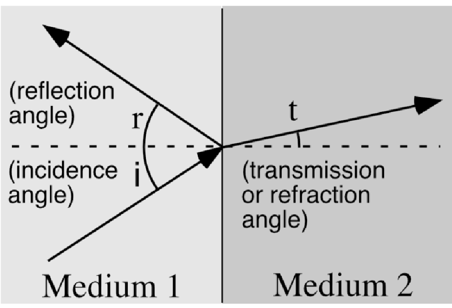
$$\begin{cases} \vec{E}_r = \vec{E}_{r0} \cos\left(\vec{k}_r \cdot \vec{x} - \omega t\right) \\ \vec{B}_r = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}\, \left(\vec{k}_r / k_r\right) \times \vec{E}_r \end{cases} , \tag{10.20}$$

והגל העובר

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \vec{E}_{t0} \cos\left(\vec{k}_t \cdot \vec{x} - \omega t\right) \\ \vec{B}_t = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}\, \left(\vec{k}_t / k_t\right) \times \vec{E}_t \end{cases} . \tag{10.21}$$

- כדי שתנאי השפה יתקיימו חייבים שלושת הגלים להיות בעלי אותו ארגומנט, וכיוון שמדובר באותה תדירות הרי בכל נקודה על השפה מתקיימים הקשרים

$$\vec{k}_i \cdot \vec{x} = \vec{k}_r \cdot \vec{x} = \vec{k}_t \cdot \vec{x} \ . \tag{10.22}$$



מהקשרים האלה מתחייבות המסקנות הבאות:

(א) שלושת וקטורי הגלים ווקטור היחידה $\vec{n}$ הניצב למישור השפה נמצאים במישור אחד.

(ב) מתקיימים השוויונות הבאים

$$k_i \sin i = k_r \sin r = k_t \sin t \quad . \tag{10.23}$$

אבל

$$k_i = k_r = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\mathrm{v}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_0\mu_0}}\,\frac{\omega}{c} = n_1\,\frac{\omega}{c} \quad , \tag{10.24}$$

ועל כן, קודם כל, זווית ההחזרה שווה לזווית הפגיעה. ומצד שני

$$k_t = n_2\,\frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin i}{\sin t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad , \tag{10.25}$$

מקום אשר n הוא מקדם השבירה במעבר מהתווך הראשון לשני. ושנית אנו מקבלים את חוק סנֶל.

<u>תנאי השפה: עוצמות יחסיות</u>

- מן הדרישה לגבי שוויון הארגומנטים (שוויון מקדמי הפזה) על-פני השפה הסקנו את התכונות הקינמטיות של המעבר מתווך אל תווך: שוויון זוויות הפגיעה וההחזרה וחוק סנֶל. את התכונות הדינמיות המאפיינות את המעבר נקבל מתנאי השפה שמקיימים השדות שבהם אנו דנים, לאמור:

(א) רציפות הרכיבים הניצבים לשפה של הווקטורים $\vec{D}$ ו-; $\vec{B}$

(ב) רציפות הרכיבים המשיקים לשפה של הווקטורים $\vec{E}$ ו- $\vec{H}$.

אשר לגל המישורי שלנו, התנאים האלה יתבטאו במשוואות הבאות: ראשית רציפות הרכיב הניצב של וקטור העזר $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, לאמור

$$\varepsilon_1\left(\vec{E}_{i0} + \vec{E}_{r0}\right)\cdot \vec{n} = \varepsilon_2 \vec{E}_{t0}\cdot \vec{n} \quad , \tag{10.26}$$

מקום שנזכיר כי $\vec{n}$ הוא וקטור יחידה הניצב למישור השפה. שנית, רציפות הרכיב הניצב לשפה של השדה המגנטי. נזכיר כאן שבזמנו הראינו (משוואה (8.25)) כי $kE = \omega B$. ועוד אנו יודעים שהשלשה $\left(\vec{k},\vec{E},\vec{B}\right)$ היא שלשה ימנית. משני הקשרים האלה ברור כי $\omega\vec{B} = \vec{k}\times\vec{E}$. הואיל והגורם ω משותף לשלושת הגלים, הפוגע, החוזר והעובר, אנו מסיקים אפוא כי

$$\left(\vec{k}_i\times\vec{E}_{i0} + \vec{k}_r\times\vec{E}_{r0}\right)\cdot\vec{n} = \left(\vec{k}_t\times\vec{E}_{t0}\right)\cdot\vec{n} \quad . \tag{10.27}$$

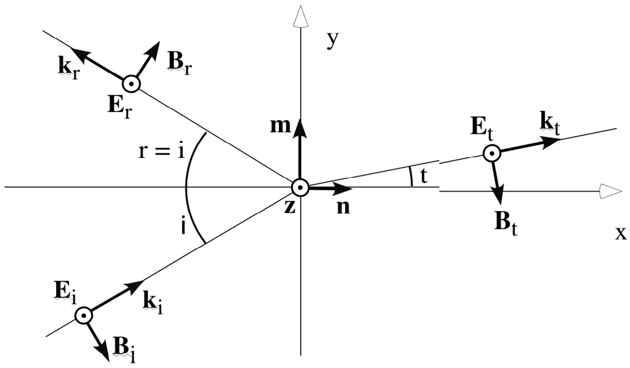
כדי לא להסתבך יותר מדי בסימונים, נגדיר את וקטור היחידה $\vec{m}$ כמקביל לשפה במישור שלושת הגלים שלנו. על כן, שלישית, נרשום את רציפות הרכיב המשיק לשפה של השדה החשמלי:

$$\left(\vec{E}_{i0} + \vec{E}_{r0}\right)\cdot\vec{m} = \vec{E}_{t0}\cdot\vec{m} \quad . \tag{10.28}$$

ולבסוף, תנאי השפה הרביעי הוא רציפות הרכיב המשיק לשפה של וקטור העזר $\vec{H} = \vec{B}/\mu$. לאמור:

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\vec{k}_i\times\vec{E}_{i0} + \vec{k}_r\times\vec{E}_{r0}\right)\cdot\vec{m} = \frac{1}{\mu_2}\left(\vec{k}_t\times\vec{E}_{t0}\right)\cdot\vec{m} \quad . \tag{10.29}$$

• לצורך הדיון והטיפול במשוואות שרשמנו, נבחין בין שני מקרים: הראשון הוא המקרה שבו קיטוב הגל הפוגע ניצב למישור הפגיעה (מישור הפגיעה, נזכיר, מוגדר על-ידי הווקטורים $\vec{k}_i$ ו-$\vec{n}$). והמקרה האחר הוא כאשר מישור הקיטוב מתלכד עם מישור הפגיעה. המקרה הכללי, כמובן, הוא צירוף מתאים של שני המקרים הפרטיים שהגדרנו.



• נפתח במקרה הראשון, המתואר בתרשים. הואיל והווקטורים $\vec{E}$ ניצבים למישור הפגיעה, מובן שאין להם רכיבים הניצבים לשפה, והתנאי הראשון אינו מתייחס למקרה הנדון. לעומת זאת, מהתנאי השלישי אנו מקבלים

$$\vec{E}_{i0}+\vec{E}_{r0}=\vec{E}_{t0} \quad . \qquad (10.30)$$

מהתנאי הרביעי, יחד עם הקשר $k=n\omega/c$, מקבלים

$$\frac{n_1}{\mu_1}\left(E_{i0}-E_{r0}\right)\cos i=\frac{n_2}{\mu_2}E_{t0}\cos r \quad . \qquad (10.31)$$

את המשוואה הזאת אפשר לבטא בצורה שונה, ועל-סמך חוק סנל לקבל בסופו של דבר

$$E_{i0}-E_{r0}=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{n_2}{n_1}\frac{\cos r}{\cos i}E_{t0}=\ldots=\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\tan i}{\tan r}E_{t0} \quad . \qquad (10.32)$$

שתי המשוואות (10.30) ו-(10.32) נפתרות על נקלה, ומתברר כי

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{1-\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{\tan i}{\tan r}}{1+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{\tan i}{\tan r}} \quad , \qquad \frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2}{1+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{\tan i}{\tan r}} \quad . \qquad (10.33)$$

במקרים מעשיים רבים $\mu_1\approx\mu_2\approx 1$, והערכים קרובים דיים כדי להניח שמדובר בשוויונות ממש. או אז מקבלות הנוסחות שמצאנו את הצורה הפשוטה יותר

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=-\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \quad , \qquad \frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2\cos i\sin r}{\sin(i+r)} \quad . \qquad (10.34)$$

הנוסחות הקובעות את העוצמות היחסיות של הגל החוזר ושל הגל העובר נקראות נוסחות פרֶנֶל (Fresnel). מכל מקום, נרשום לפנינו גם את הנוסחות למקרה שבו קיטוב הגל הפוגע מקביל למישור הפגיעה. ההוכחה נגזרת בדומה למקרה הקיטוב הניצב למישור הפגיעה, ומומלץ לוודא את הנוסחות שאנו רושמים כאן, והן קודם כל:

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\sin 2i-\sin 2r}{\sin 2r+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\sin 2i} \quad \rightarrow \quad \frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)} \quad , \qquad (10.35)$$

מקום שחץ ה"שאיפה" מציין את התוצאה המתאימה למקרה $\mu_1=\mu_2$. ושנית

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2}{n}\frac{\sin 2i}{\sin 2r+\frac{\mu_1}{\mu_2}\sin 2i} \quad\rightarrow\quad \frac{2\cos i\sin r}{\sin(i+r)\cos(i-r)} \quad . \tag{10.36}$$

- מכאן ואילך נצטמצם לדיון במקרים המעשיים $\mu_1=\mu_2$. לארבע הנוסחות, השתיים המופיעות בנוסחה (10.34) והשתיים בנוסחות (10.35) ו-(10.36), נוסיף את שתי הנוסחות המתאימות לפגיעה ניצבת, לאמור

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \quad , \qquad \frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2n_1}{n_1+n_2} \quad . \tag{10.37}$$

- נתייחס עתה למקרה של פגיעה ניצבת, לנוסחות (10.37). ראשית מתברר מייד שכאשר עוברים מתחום "קלוש" (מבחינה אופטית) לתחום "צפוף" יותר, לאמור אם $n_2>n_1$, יש היפוך פזה של הגל החוזר (זאת אומרת שהפזה קופצת ב- $180°$).
- נציין שגם במקרה של פגיעה כללית (לאו דווקא ניצבת), כאשר קיטוב הגל הפוגע ניצב למישור הפגיעה, אז לפי נוסחה (10.34)) יהיה היפוך פזה בגל החוזר אם $i>r$, זאת אומרת אם $n_2>n_1$, כלומר כמו בפגיעה ניצבת.
- לעומת זאת, כאשר הקיטוב מקביל למישור הפגיעה קובעת נוסחה (10.35) כי אין היפוך פזה כל עוד $i+r<\pi/2$, אבל כמובן אם $i+r>\pi/2$ שוב יופיע היפוך הפזה.
- נמשיך לדון במקרה של קיטוב במישור הפגיעה. מה קורה כאשר $i+r=\pi/2$? – משרעת הגל החוזר מתאפסת! הזווית i שעבורה מתקיים תנאי זה נקראת זווית ברוסטר (Brewster), והיא ניתנת בעזרת חוק סנל:

$$n_1\sin i=n_2\sin r \quad\Rightarrow\quad \frac{n_2}{n_1}=n=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\sin i}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi-r\right)}=\frac{\sin i}{\cos i}=\tan i \quad , \tag{10.38}$$

הנה כי כן, מתברר כי זווית ברוסטר היא

$$i_B=\tan^{-1}n \quad . \tag{10.39}$$

אחת המסקנות המתחייבות מדיוננו היא שאם גל בעל קיטוב כלשהו פוגע בשפה מישורית בזווית ברוסטר, יהיה הגל החוזר תמיד מקוטב קווית ובניצב למישור הפגיעה. אפילו אם הפגיעה אינה בדיוק בזווית ברוסטר, בגל החוזר יוחלש המרכיב בעל הקיטוב המקביל למישור הפגיעה.

- בדיונינו במשוואות פרֶנֶל נעסוק עוד בתופעת ההחזרה הגמורה. אם עוברים מאיזור צפוף לאזור קלוש, לאמור אם $n_2<n_1$, תהיה זווית השבירה גדולה מזווית הפגיעה: $r>i$. מכל מקום, חוק סנל קובע $n_1\sin i=n_2\sin r$, ועל כן אם $\sin i>n_2/n_1$, או אז נמצא כי

$$\sin r=\frac{n_1}{n_2}\sin i>1 \quad . \tag{10.40}$$

ומאליו יובן כי "אין דבר כזה," ובמילים פשוטות במקרה כזה פשוט אין גל עובר, ובלשון אחרת מדובר באמת בהחזרה גמורה.

<u>הצגת הגלים כפונקציה מרוכבת והשדה בתווך הקלוש במקרה ההחזרה הגמורה</u>

- בהנחה כי השוויון הידוע כנוסחת אוילֶר, לאמור $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, מוכר, נוח מאד ומקל בהוכחת תוצאות שונות לייצג את הגלים המישוריים שבהם אנו דנים בצורת "החלק הממשי של ביטוי מרוכב." בסך הכל הטענה היא שנכון וכשר למהדרין לכתוב

$$E\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right) = Re\left\{E\,e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}\right\} \quad . \tag{10.41}$$

ברור כי $Re\{......\}$ משמעותו החלק הממשי של הביטוי בסוגריים. אחד הדברים הנוחים בהצגה זאת הוא שאם נרשה למשרעת השדה E *להיות מספר מרוכב, למשל* $Ee^{i\varphi}$*, אז צריך להיות ברור כי פירוש הדבר שאז השדה הוא* $E\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t+\varphi\right)$*. במלים אחרות, את הפזה של גל אפשר לכלול במשרעת המרוכבת.*

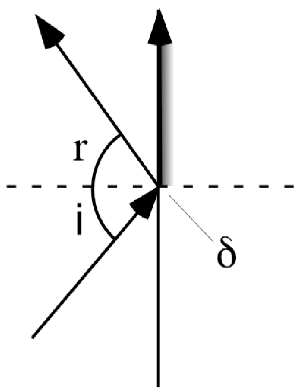
- *נחזור לדיוננו בעניין ההחזרה הגמורה. נזכיר כי התופעה מתקיימת בתנאי של משוואה (10.40), ולצורך הדיון הנוכחי נסמן עוד* $\sin r = \alpha > 1$*. מכל מקום, נוכל לרשום לפנינו כי*

$$\cos r = \sqrt{1-\alpha^2} = i\sqrt{\alpha^2-1} = i\beta \quad . \tag{10.42}$$

במקרה ה"סדיר", בזווית פגיעה קטנה יותר ובאין החזרה גמורה וקיומו של גל עובר ממשי, ובסימון (לצורך הדיון הנוכחי) של מישור הפגיעה כמישור (x,y), הרי

$$\vec{k}_t\cdot\vec{x} = k_t\left(x\cos r + y\sin r\right) \quad . \tag{10.43}$$

אולם משמדובר בהחזרה גמורה, מתקיים התנאי של משוואה (10.42) ואז



$$e^{i\vec{k}_t\cdot\vec{x}} = e^{-k_t\beta x}e^{ik_t\alpha y} \quad . \tag{10.44}$$

אנו רואים אפוא שהגל העובר (או הנשבר...) מתקדם במקביל לשפה, אולם הוא דועך מעבר לה, כלומר אינו חודר לתווך הקלוש (מבחינה אופטית) אלא כדי עומק חדירה δ המאופיין על-ידי הערך ההופכי של המקדם $k_t\beta$:

$$\delta = \frac{1}{k_t\beta} \quad . \tag{10.45}$$