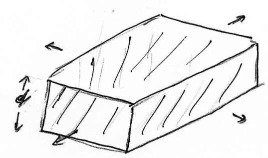
תרגיל בחשמל ומגנטיות (תרגיל מס׳ 3)

1 חוק גאוס

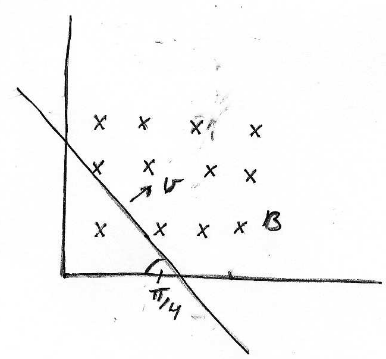
בלוק בעל שטח אינסופי וגובה d טעון הומוגנית בצפיפות מטען לנפח ρ.



א. מהו השדה במרחב כפונקציה של המרחק z ממחצית הבלוק?
ב. מהו הפוטנציאל במרחב (נתון $\varphi(z=0)=0$)?

2 חוק פאראדיי

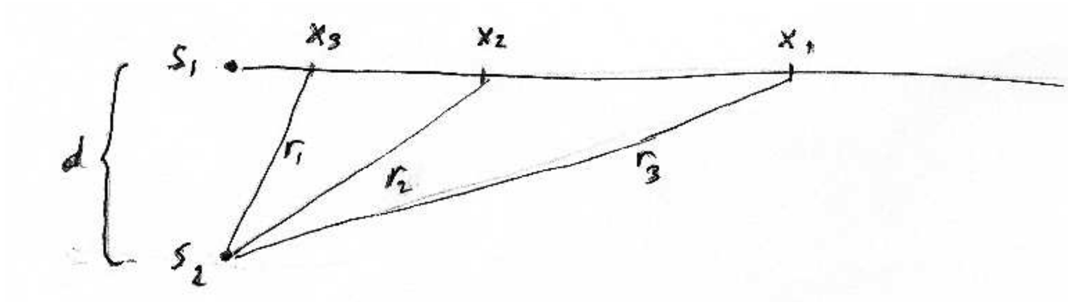
על שני מוטות מוליכים ניצבים קבועים מחליק מוט שלישי מוליך בזווית 45 מעלות ובמהירות קבועה v. בזמן $t=0$ המוט נוגע בנקודת חיתוך שני המוטות הקבועים. שורר שדה מגנטי קבוע B אל תוך הדף ושלוש המוטות בעלי התנגדות ליחידת אורך λ.



מהו גודלו וכיוונו של הזרם כפונקציה של הזמן?

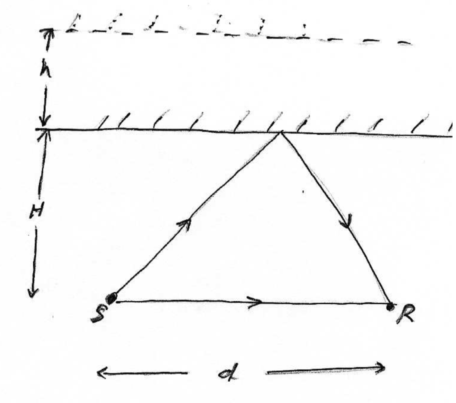
3 התאבכות

שני מקורות S_1 ו-S_2 במרחק $d=4m$ אחד מהשני קורנים באורך גל $\lambda=1m$. מהם שלושת הנקודות מימין ל-S_1 בהם יש מקסימום?



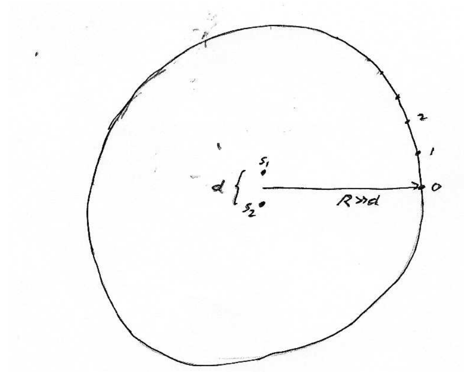
4 התאבכות

מקור אור S פולט אור בתדר f. בגובה H ניצבת מראה מישורית ובמרחק d ניצב מקלט R. המקלט קולט אות מקסימלי בתצורה הנתונה, מהו הגובה הנוסף h בו יש להעלות את המראה על מנת לקבל את המינימום הסמוך?



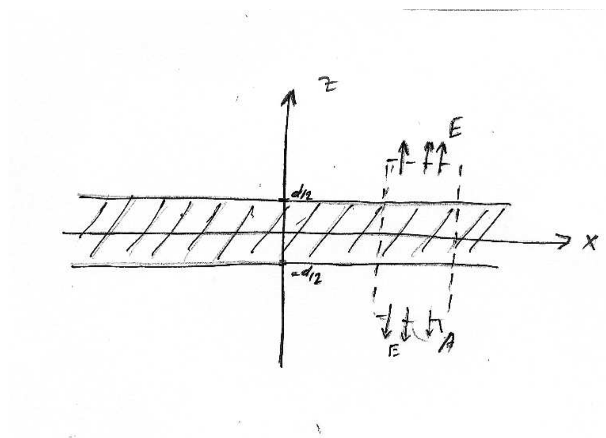
5 התאבכות

מקורות קוהרנטים במרחק $d = 40cm$ מקרינים אור באורך גל $\lambda = 2cm$. מקיפים את המקורות במסך מעגלי ברדיוס $R \gg d$.כמה נקודות מוארות (נקודות מקסימום) רואים על המסך?



פתרון 1

(א) מסימטריה של הבעייה ניתן להניח כי השדה יהיה ניצב לבלוק ושווה עבור גובה z נתון. נבחר מעטפת גאוס גלילית ששטח כל פאה הוא A והגליל סימטרי ביחס למישור xy.



הואיל והשדה קבוע וניצב לפאות אז השטף הוא

$$\Phi = E2A$$

אם $z \le d/2$ אז המטען הכלוא במעטפת הוא $Q = \rho A2z$. אם $z \ge d/2$ אז המטען הוא $Q = \rho Ad$. לכן לפי חוק גאוס

$$2EA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0}\rho A2z & z \le \frac{d}{2} \\ \frac{1}{\epsilon_0}\rho Ad & z \ge \frac{d}{2} \end{cases}$$

לכן השדה הינו

$$\vec{E}=\begin{cases}\frac{\rho}{\epsilon_0}\vec{z} & z\le\frac{d}{2}\\ \frac{\rho d}{2\epsilon_0}\frac{\vec{z}}{z} & z\ge\frac{d}{2}\end{cases}$$

(ב) נחשב את הפרש הפוטנציאל מ-$z=0$ עד לנקודה כלשהיא z_0. נבחר מסילה המקבילה לציר z כך שהשדה מקביל לה.

$$\varphi(z_0)-\varphi(0)=-\int_0^{z_0}\vec{E}\cdot d\hat{z}=-\int_0^{z_0}Edz$$

עבור $z_0\le d/2$

$$\int_0^{z_0}Edz=\frac{\rho}{\epsilon_0}\int_0^{z_0}zdz=\frac{\rho}{\epsilon_0}\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{z_0}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{z_0^2}{2}$$

עבור $z_0\ge d/2$

$$\int_0^{z_0}Edz=\frac{\rho}{\epsilon_0}\int_0^{d/2}zdz+\frac{\rho d}{2\epsilon_0}\int_{d/2}^{z_0}dz=\frac{\rho}{\epsilon_0}\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{d/2}+\frac{\rho d}{2\epsilon_0}\left.z\right|_{d/2}^{z_0}=\frac{\rho d}{2\epsilon_0}\left(z-\frac{d}{4}\right)$$

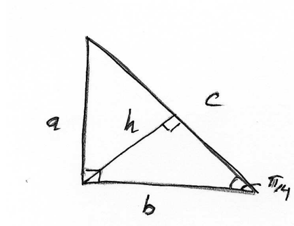
לכן

$$\varphi(z)=\begin{cases}-\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} & z\le\frac{d}{2}\\ -\frac{\rho d}{2\epsilon_0}\left(z-\frac{d}{4}\right) & z\ge\frac{d}{2}\end{cases}$$

ניתן לראות כי שני הביטויים מתלכדים עבור $z=d/2$ (אחרת היתה בעיה כי אז זה אומר שדה אינסופי בנקודה זו). ניתן לבדוק כי מתקיים $E=-\frac{d\varphi}{dz}$.

פתרון 2

בכל זמן נתון יוצרים שלושת המוטות משולש ישר זווית (הואיל והזווית היא 45 אז הוא גם שווה שוקיים).



משני הישרים ניצבים נוריד אנך ליתר h. הואיל ו-h הוא המרחק שעושה אחת הנקודות על המוט הנע מנקודת החיתוך אזי

$$h = vt$$

נחלץ מכך את שאר הצלעות

$$a = b = \frac{h}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}h$$
$$c = \sqrt{2}a = 2h$$

שטח המשולש הינו

$$S = \frac{1}{2}ab = v^2t^2$$

היקף המשולש

$$l = a + b + c = 2a + 2h = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)vt$$

השטף המגנטי

$$\Phi = BS = Bv^2t^2$$

לכן המתח

$$V = \frac{d\Phi}{dt} = 2Bv^2t$$

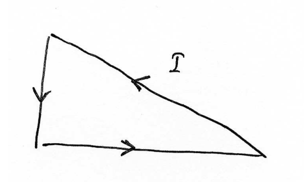
ההתנגדות במעגל היא גם פונקציה של הזמן

$$R = \lambda l = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)\lambda vt$$

כעת לפי חוק אוהם

$$I = \frac{V}{R} = \frac{Bv^2t}{\left(1 + \sqrt{2}\right)\lambda vt} = \frac{Bv}{\left(1 + \sqrt{2}\right)\lambda}$$

הזרם הינו קבוע בזמן. השטח גדל לכן השטף המגנטי גדל בזמן. לפי חוק לנץ הזרם המושרה ישאף להקטין את השטף הקיים ע"י כך שייצור שדה מגנטי בכיוון הפוך למקורי לכן הזרם יהיה נגד כיוון השעון.



פתרון 3

מקסימום מתקבל כאשר הפרש המרחקים הוא כפולה שלמה של אורך הגל.

$$
\begin{aligned}
r_n - x_n &= n\lambda \\
\sqrt{x_n^2 + d^2} - x_n &= n\lambda \\
x_n^2 + d^2 &= (x_n + n\lambda)^2 = x_n^2 + 2n\lambda x_n + n^2\lambda^2 \\
x_n &= \frac{d^2 - n^2\lambda^2}{2n\lambda} \quad n = 1, 2, 3 \\
x_1 = 7.5m \quad x_2 &= 3m \quad x_3 = 1.1m
\end{aligned}
$$

פתרון 4

הפרש המרחקים כאשר המראה בגובה H נותן מקסימום:

$$2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + H^2} - d = m\lambda$$

אורך הגל ניתן ע"י $\lambda f = c$.
הפרש המרחקים כאשר המראה בגובה $H + h$ נותן מינימום:

$$2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (H+h)^2} - d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

נחסיר את המשוואות

$$2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (H+h)^2} - 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + H^2} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+(H+h)^2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+H^2}+\frac{\lambda}{4}$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2+(H+h)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2+H^2+\frac{\lambda}{2}\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+H^2}+\frac{\lambda^2}{16}$$

$$h^2+2Hh=\frac{\lambda}{2}\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+H^2}+\frac{\lambda^2}{16}$$

נסמן $a^2=\frac{\lambda}{2}\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+H^2}+\frac{\lambda^2}{16}$ קיבלנו משוואה ריבועית שפתרונה החיובי

$$h=\sqrt{H^2+a^2}-H$$

פתרון 5

נסתכל על רבע מעגל. הואיל והמרחק d הוא כפולה שלמה של λ אז בדיוק בזווית של 90 מעלות תהיה נק' מקסימום. מספר הנקודות עד ל-90 מעלות לא כולל את הנקודה ב-0 מעלות ניתנת ע"י השוויון

$$d\sin\frac{\pi}{2}=m\lambda$$

$$m=\frac{d}{\lambda}=20$$

הואיל ולא ספרנו את הנק' בזווית 0 אז פשוט מכפילים ב-4 על מנת לקבל את המספר על כל המעגל

$$M=4m=80$$