ממשוואות מקסוול למשוואות גלים אלקטרומגנטיים.

משוואות מקסוול הינן:

חוק פארדי:

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

חוק גאוס:

$$\int \bar{E}\cdot d\bar{s} = Q/\varepsilon_0$$

חוק אמפר - מקסוול:

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 I + \underbrace{\mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}_{\text{זרם העתקה}}$$

חוסר מטענים מגנטיים:

$$\int \bar{B}\cdot d\bar{s} = 0$$

אנו מחפשים פתרון למשוואות בריק כאשר אין מטענים ואין זרמים:

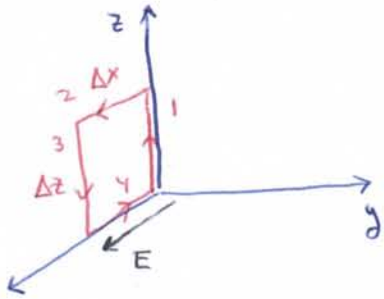
$Q=0$
$I=0$

נחפש פתרון מהצורה:

$$\vec{E} = E(z,t)\,\hat{x}$$

פתרון שתלוי רק ב- z ו- t
והכיוון של השדה רק בכיוון ציר $\hat{x}$

הפתרון מקיים את חוק גאוס אוטומטית. נראה מה מתקבל מחוק פארדי. כדי לראות זאת נבצע אינטגרציה על המסלול המתואר בציור.



$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{l} = \overset{\boxed{1}}{\Delta z\,\underbrace{(\vec{E}\cdot\hat{z})}_{=0}} + \overset{\boxed{2}}{\Delta x\, E(\Delta z,t)} - \overset{\boxed{3}}{\Delta z\,\overbrace{(\vec{E}\cdot\hat{z})}^{=0}} - \overset{\boxed{4}}{\Delta x\, E(z=0,t)} =$$

$$= \Delta x\left(E(z=\Delta z,t) - E(z=0,t)\right)$$

$$= \Delta x\,\Delta z\,\frac{\partial E(z,t)}{\partial z}$$

עבור Δz קטן מאוד

(נגזרת חלקית = לגזור לפי z ולשמור על הגדלים האחרים קבועים.

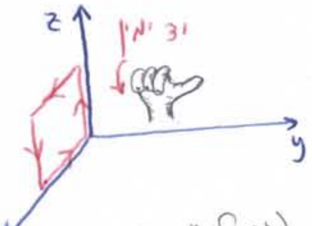
כדי שצד ימין של חוק פארדי לא יהיה שווה לאפס, צריך שדה מגנטי בכיוון ציר $\hat{y}$. שימו לב כי אם היינו בוחרים לולאות אינטגרציה סביב צירים אחרים כי אז $\oint E\cdot dl$ היה שווה לאפס והיינו מסיקים כי לא צריך להיות ל- B רכיב סביב הצירים האחרים.

(2)

נ.א. ישנו רכיב: $\vec{B} = B(z,t)\,\hat{y}$

עבור $\Delta x, \Delta z$ קטנים מאוד, B הוא בקירוב קבוע על המשטח הכלוא בלולאה הזו:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(B(z,t)\,\Delta x\,\Delta z\right) =$$
$$= \Delta x\,\Delta z\,\frac{dB(z,t)}{dt}$$



(גם לסימפסונים רק 4 אצבעות!)

שימו לב כי <u>הכיוון</u> החיובי שמוגדר ע"י הלולאה הוא ציר $\hat{y}$

ולכן, לפי הכיוון שהגדרנו את B שהוא $+\hat{y}$

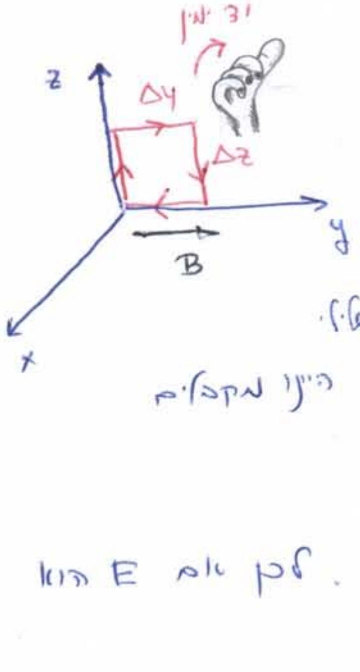
$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\,\Delta x\,\Delta z\,\frac{\partial B}{\partial t}(z,t)$$

גוזרים לפי t כאשר z נשאר קבוע

סה"כ מחוק פארדי נקבל: $\Delta x\,\Delta z\,\frac{\partial E}{\partial z}(z,t) = -\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial B}{\partial t}(z,t)$

$$1:\quad \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

כדי לקבל קשר נוסף בין E ו- B, נשתמש בחוק אמפר-מקסוול. הפעם נבצע לולאת אינטגרציה כפי שמתואר בציור הבא:



הפעם:

$$\oint B\cdot ds = \Delta z\,\Delta y\,\frac{\partial B}{\partial z}$$

שימו לב כי הצד החיובי ב- y הוא ב- $z=\Delta z$ ואילו השלילי הוא ב- $z=0$. אם כיוון האינטגרציה היה הפוך כי אז היינו מקבלים את <u>מינוס</u> הנגזרת לפי z.

כעת יד ימין נותנת שכיוון החיובי של הלולאה הוא $-\hat{x}$.. לכן אם E הוא בכיוון $+\hat{x}$, אזי השטף דרך הלולאה יהיה שלילי!

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = -\,\Delta z\,\Delta y\,\frac{\partial E}{\partial t}(z,t)$$

סה"כ נקבל מחוק אמפר - מקסוול כי :

$$2: \quad \frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{\partial E}{\partial t}\mu_0\varepsilon_0$$

מחוק פאראדי היה :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

נגזור לפי $\partial/\partial z$ ונקבל:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial z} = +\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\mu_0\varepsilon_0$$

ניתן להחליף סדר גזירה

סה"כ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

כיון שלשני האיברים יהיו אותן היחידות , $\mu_0\varepsilon_0$ צריך להיות $(\text{מהירות})^{-2}$

מהירות זו היא מהירות האור בריק שהיא מהירות ההתפשטות של גלים אלקטרומגנטיים.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 3\times10^8 \ m/s$$