פרופ' יצחק טוכמן
פרופ' ניר שביב
ד"ר ברק קול

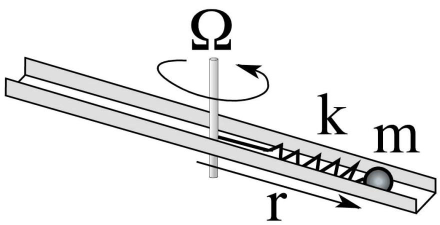
מכניקה ויחסות פרטית 77101

בוחן אמצע סמסטר, תשס"ז

- המבחן הוא ללא כל חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
  - 2 דפי נוסחאות (4 עמודי A4)
  - מחשבון
  - חוברת אינטגרלים או ספר עזר במתמטיקה (Mathematical Handbook)
  - מילון לדוברי שפה זרה.
- יש לנמק את התשובות. תשובה לא מנומקת לא תתקבל.
- משך הבוחן שעה ו-35 דקות.
- בבחינה 2 חלקים:
  - בחלק א' יש לענות על 1 מתוך 2 שאלות. (50 נק').
  - בחלק ב' יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות. (50 נק').
- יש לכתוב בצד שמאל של המחברת בלבד, זאת כדי שניתן יהיה לסרוק אותה. דפים כתובים בצד ימין לא יסרקו ולא תוכלו לראותם אחרי הבדיקה!
- יש לכתוב את פתרון השאלות השונות בעמודים נפרדים.
- כמו בחיים האמיתיים, בשאלות יתכנו נתונים שאינם דרושים לפתרון הבעיה.

בהצלחה!

חלק א'



1. נתונה מסילה המסתובבת אופקית סביב מרכזה במהירות זוויתית Ω קבועה. ממרכזה קשור קפיץ בעל קבוע קפיץ k ואורך שיווי משקל r_0. אל הקפיץ קשורה מסה m. המסה והקפיץ מאולצים לנוע לאורך המסילה בלבד.

(א) מהי נקודת שיווי המשקל של המסה m?

(ב) מהו התנאי על Ω כך שתהיה נקודת שיווי משקל?

(ג) למה שווה סכום הכוחות הרדיאלי $F_r(r)$ במערכת המסתובבת?

(ד) מה תהיה התדירות ω לתנודות קטנות סביב נקודת שיווי המשקל?

פתרון:

א. סכום הכוחות הינו:

$$F_r(r) = m\Omega^2 r - k(r - r_0)$$

(סכום זה מורכב מכח הקפיץ וכל צנטריפוגלי).

שיווי משקל דורש $F_r = 0$ ולכן:

$$r_{eq} = \frac{r_0}{1 - m\Omega^2/k} = \frac{r_0}{1 - \Omega^2/\omega_0}$$

כאשר סימנו $\omega_0^2 \equiv k/m$ שהיא התדירות הטבעית של הקפיץ.

ב. התנאי על Ω הוא

$$\Omega^2 < \omega_0^2$$

אחרת $F > 0$ לכל $r > 0$ והמסה עפה החוצה.

ג. כזכור מסעיף א':

$$F_r(r) = m\Omega^2 r - k(r - r_0)$$

ד. עבור נק' שיווי משקל r_{eq} מגדירים:

$$k_{\text{eff}} = -\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_{eq}}$$

ואז תדירות התנודות הקטנות נתונה ע"י:

$$\omega^2 = \frac{k_{\text{eff}}}{m}$$

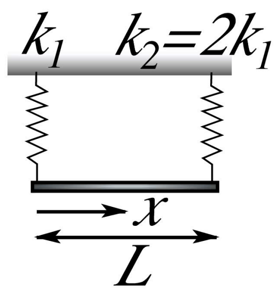
במקרה דנן:

$$k_{\text{eff}} = -\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_{eq}} = k - m\Omega^2$$

ולכן תדירות התנודות הקטנות היא

$$\omega^2 = \frac{k_{\text{eff}}}{m} = \frac{k}{m - \Omega^2} = \omega_0^2 - \Omega^2$$

2. נתון מקל באורך L ומסה M. למקל צפיפות מסה אחידה. המקל תלוי על שני קפיצים בקצוותיו. לקפיצים קבועי קפיץ של k_1 ו-$k_2 = 2k_1$, כמוראה בשרטוט. ניתן להניח כי המקל נשאר אופקי בקירוב (דהיינו, הקפיצים קשיחים ומתארכים מעט מאד ביחס לאורכם).



(א) מהו מיקום מרכז המסה?

(ב) מהו היחס בין התארכות הקפיצים y_1/y_2?

נחזור על השאלה עבור מקל עם צפיפות מסה ליחידת אורך שאינה קבועה:

$$\rho = \frac{M}{L}\left(1 + \alpha\frac{(2x-L)}{L}\right), \quad 0 < \alpha < 1$$

כאשר x הוא המרחק מהקצה השמאלי של המוט.

(ג) מהו מיקום מרכז המסה?

(ד) מהו היחס בין התארכות הקפיצים y_1/y_2?

פתרון:
א. מסימטריה: $x_{cm} = L/2$.
ב. אם נסמן ב- F_1, F_2 את שני כוחות הקפיץ, אז מסימטריה $F_1 = F_2$ ולפיכך:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{F_1/k_1}{F_2/k_2} = \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = 1 \cdot 2 = 2$$

ג. עתה אין שיקולי הסימטריה מספקים ויש לערוך את החישוב המלא:

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\rho(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L x\left(1+\alpha\frac{2x-L}{L}\right)dx \\ &= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2}\left(1-\alpha\right)x^2 + \frac{2\alpha}{3L}x^3\right]_0^L = L\left[\frac{1}{2}(1-\alpha) + \frac{2\alpha}{3}\right] = L\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\alpha\right] \end{aligned}$$

כמו כן נוודא כי

$$M = \int \rho dx = \int_0^L dx \frac{M}{L}\left(1+\alpha\frac{2x-L}{L}\right) = M$$

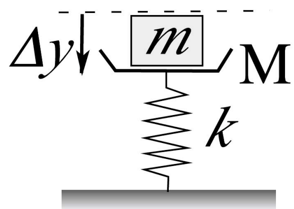
כפי שהנחנו באופן מוסווה בחישוב x_{cm}.
ד. מתקיים שיוון מומנטים סביב מרכז המסה:

$$F_1 x_{cm} = N_1 = N_2 = F_2(L - x_{cm}).$$

לכן, היחס בין התארכות הקפיצים הוא:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{F_1}{F_2}\cdot\frac{k_2}{k_1} = \frac{N_1/x_{cm}}{N_2/(L-x_{cm})}\cdot\frac{k_2}{k_1} = \frac{L-x_{cm}}{x_{cm}}\cdot 2 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\alpha}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\alpha}\cdot 2 = \frac{1-\alpha/3}{1+\alpha/3}\cdot 2$$

חלק ב'



3. נתון קפיץ בעל קבוע קפיץ k. אל הקפיץ מחובר מגש בעל מסה M. על המגש מונחת מסה m. מפעילים כח כך שהקפיץ מתכווץ ב- Δy, ומשחררים (מפסיקים להפעיל את הכח) בפתאומיות.

מהו התנאי על ההתכווצות Δy, כך שהמסה m תעזוב את המגש?

פתרון:
המסה m תוכל לעזוב את המגש כאשר הכח הנורמלי יתאפס:

$$N = 0$$

כאשר $N = 0$ הכח היחיד הפועל על m הוא משקלה mg ולכן היא מאיצה כלפי מטה בתאוצה g (נפילה חופשית).
כיוון שזהו רגע ההתנתקות, המסה M מאיצה בתאוצה g כלפי מטה. לכן,

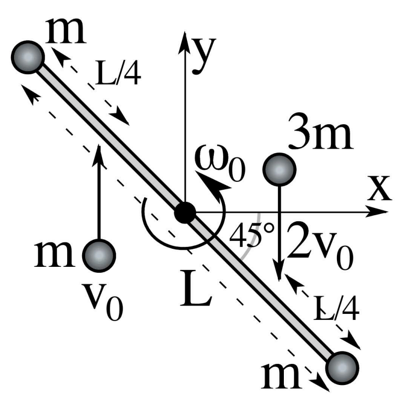
$$Mg = Ma = Mg + F_{spring} + (N = 0)$$

מכאן ניתן להסיק כי בעת העזיבה

$$F_{spring} = 0$$

דהיינו, הקפיץ נמצא באורכו הרפוי. כדי שהקפיץ יוכל להגיע לאורך זה, יש לדחוף את הקפיץ (ל- $y_{initial}$) במידה השווה להתכווצות מצב שיווי המשקל y_{eq} מהמצב הרפוי y_0. זאת מפני שתנועת הקפיץ תהיה בין $y_{initial} = y_{eq} - \Delta y$ לבין $y_0 = y_{eq} + \Delta y$. במילים אחרות,

$$\Delta y = y_{eq} - y_{initial} = y_0 - y_{eq} = \frac{(M+m)g}{k}.$$



4. נתון מוט חסר מסה בעל אורך L . בקצוותיו מחוברות שתי מסות m. נתון כי המוט מסתובב <u>אופקית</u> סביב ציר העובר במרכזו,במהירות זוויות ω_0. ברגע נתון, בו ציר המוט נמצא בזווית של $45°$ מציר $\hat{\mathbf{x}}$, פוגעות ונדבקות שתי מסות אל המוט באמצע הקטעים המחברים את מרכז המוט אל קצוותיו (כמוראה בציור).

המסה הראשונה, בעלת מסה m נעה בכיוון ציר $\hat{\mathbf{y}}$, במהירות של v_0 ואילו המסה השניה בעלת מסה $3m$ נעה בכיוון $-\hat{\mathbf{y}}$, במהירות של $2v_0$, כמוראה בציור.

למה שווה המהירות הזוויות ω של המערכת לאחר פגיעת המסות?

פתרון:
במערכת מתקיים שימור תנע זוויתי סביב הציר.
רכיב ההתנע הזוויתי ההתחלתי של המוט בכיוון הציר $(\hat{\mathbf{z}})$ הינו:

$$L_{i,rod} = \sum m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)_z = \sum m_i\omega_0 r_i^2 = \omega_0 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \omega_0\frac{1}{2}mL^2.$$

התנע ההתחלתי של המסות הוא:

$$L_{i,rod} = \sum m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)_z = -3m\cdot 2v_0\frac{L}{4\sqrt{2}} - mv_0\frac{L}{4\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}mv_0L.$$

יש לשים לב כי מופיע סימן מינוס היות והמסות באות עם תנע זוויתי שלילי יחסית לתנועת המוט. כמו כן, היות והמוט מסובב, מופיע $\cos(45°)$. התנע הזוויתי הסופי הוא:

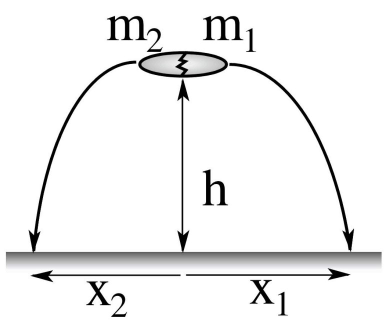
$$L_f = \omega_f\sum m_i r_i^2 = \omega_f\left[2M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 3M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2\right] = \omega_f\frac{3}{4}ML^2.$$

שימור תנע זוויתי דורש:

$$\omega_0\frac{1}{2}ML^2 - \frac{7\sqrt{2}}{8}Mv_0L = \omega_f\frac{3}{4}ML^2$$

ולכן:

$$\omega_f = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\omega_0 - \frac{7\sqrt{2}}{8}\frac{v_0}{L}\right] = \frac{2}{3}\omega_0 - \frac{7\sqrt{2}}{6}\frac{v_0}{L}$$



5. מסה m נמצאת במנוחה בגובה h מעל פני הקרקע. בעקבות פיצוץ, m מתחלקת לשני חלקים m_1 ו-m_2. כמו כן נתון כי המהירות ההתחלתית של כל חלק היא אופקית, והאנרגיה הקינטית הכוללת היא E.

יהיו x_1, x_2 המרחקים האופקיים שעוברים החלקים עד לנפילתם על הקרקע.

מהו היחס x_1/x_2 ?

פתרון:
כיוון שהפיצוץ הוא כח פנימי, מתקיים שימור תנע קווי, בפרט בכיוון ציר x:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

זמן הנפילה T זהה עבור שני החלקים:

$$\frac{1}{2} g T^2 = h.$$

המרחק האופקי הוא:

$$x = v_x T$$

ולכן יחס המרחקים האופקיים הוא:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{v_{x,1} T}{v_{x,2} T} = \frac{m_2}{m_1}.$$