פתרון שאלה 1

א. מכיוון שהמהירות נתונה בניצב לכיוון הרדיאלי:

$$\vec{L} = m\cdot R\cdot u = mR\sqrt{\frac{GM_E}{2R}} = \boxed{m\sqrt{\frac{GM_ER}{2}}\,\hat{n}_\perp}$$

$$E = \frac{1}{2}mu^2 + U_g = \frac{1}{2}m\frac{GM_E}{2R} - \frac{GM_Em}{R}$$

$$\boxed{E = -\frac{3GM_Em}{4R}}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\mu \equiv m\\ \alpha \equiv GM_E\end{matrix}}$$

חשוב לזכור שאם רוצים להשתמש בפוטנציאל האפקטיבי – $\frac{L^2}{2\mu R^2}$ אזי יש להחליף את הביטוי לאנרגיה הקינטית ב- $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ שהוא במקרה שלנו $= 0$. לחילופין, אם u זו המהירות הכללית, אין צורך להכניס את הפוטנציאל האפקטיבי.

ב.

$$r_0 = \frac{L^2}{m^2GM_E} = \frac{\cancel{m^2}\cancel{G}\cancel{M_E}R}{2\cdot\cancel{m^2}\cancel{G}\cancel{M_E}} = \boxed{\frac{R}{2}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{2E}{\cancel{\mu}}\right)\cdot\left(\frac{L}{\cancel{\mu} G M_E}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{3\cancel{G M_E}\cdot \cancel{m}}{2\cancel{R}\cdot \cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m^2} \cancel{G M_E} \cdot \cancel{R}}{2\cdot \cancel{m^2} (\cancel{G M_E})^{\cancel{2}}}} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$$

ולכן:

$$\boxed{r(\theta) = \frac{R}{2\left(1 + \frac{1}{2}\cos\theta\right)}}$$

ג.

$$r_{min} = \frac{r_0}{1+\varepsilon} = \frac{R/2}{1 + 1/2} = \boxed{\frac{R}{3}}$$

שימור תנע זוויתי:

$$L_{R_{min}} = \cancel{m}\cdot\frac{R}{3}\cdot V_{R_{min}} = \cancel{m}\sqrt{\frac{G M_E R}{2}}$$

ב-R_{min} המהירות
ניצבת לכיוון
הרדיוס:

$$V_{R_{min}} = \frac{3}{R}\sqrt{\frac{G M_E R}{2}}$$

$$\boxed{V_{R\,min} = 3\sqrt{\frac{GM_E}{2R}} = 3u}$$

ג. נסמן ב- $\tilde{V}$ את המהירות במסלול מעגלי ברדיוס המינימלי $= R/3$.

קיים:

הכוח הגרביטציוני = לכוח הצנטריפטלי.

$$\cancel{m}\cdot\frac{\tilde{V}^2}{(R/3)} = \frac{G\cancel{m}M_E}{(R/3)^2}$$

$$\boxed{\tilde{V} = \sqrt{\frac{3GM_E}{R}}}$$

לפני היריה קיים:

$$m \uparrow V = 3\sqrt{\frac{GM_E}{2R}}$$

אחרי היריה:

$$\frac{4}{5}m \uparrow \tilde{V} = \sqrt{\frac{3GM_E}{R}}$$

$$\frac{1}{5}m \downarrow u' = ?$$

<u>שימור תנע מתקיים:</u>

$$\cancel{m}\cdot 3\sqrt{\frac{GM_E}{2R}} = \frac{4}{5}\cancel{m}\sqrt{\frac{3GM_E}{R}} + \frac{1}{5}\cancel{m}u'$$

$$u' = 15\sqrt{\frac{GM_E}{2R}} - 4\cdot\sqrt{\frac{3GM_E}{R}} =$$

$$\left(\frac{15}{\sqrt{2}} - 4\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{GM_E}{R}} \cong \boxed{3.68\sqrt{\frac{GM_E}{R}}}$$

ובסימן למהירות (+). כלומר, הכיוון תנועת
הראשונית של הלוויין.
פתרון נוסף קיים, לתנועה מעגלית של
הלוויין, הכיוון הפוך לכיוון תנועתו הראשונית.
במקרה זה:

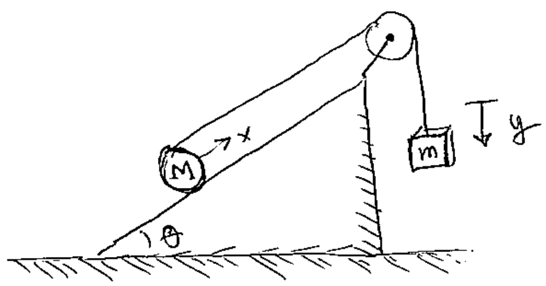
$$\cancel{m}\cdot 3\cdot\sqrt{\frac{GM_E}{2R}} = (-)\,\frac{4}{5}\cdot\cancel{m}\sqrt{\frac{3GM_E}{R}} + \frac{1}{5}\cancel{m}\,u'$$

$$u' = \left(\frac{15}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{GM_E}{R}} = \boxed{17.53\cdot\sqrt{\frac{GM_E}{R}}}$$

שאלה 2:

את השאלה הנ"ל ניתן לפתור בכמה דרכים. הקצרה ביותר היא ע"י שימוש באנרגיות.

א. נבחן את האנרגיה הפוטנציאלית הכוללת במערכת.



$$U_{pot} = Mgx\sin\theta - mgy$$

אולם, ישנו אילוץ המקשר בין y ו-x כי הדיסקה אינה מחליקה.
האילוץ קובע:

$$y = 2x$$

זאת מכיון שעל כל יחידת מרחק שמרכז המסה של הדיסקה עולה, החלק העליון של הדיסקה נע ומשחרר שתי יחידות מרחק של חוט.

$$U_{pot} = (M\sin\theta - 2m)xg$$

כדי שהמסה M תעלה, אנו צריכים שהאנרגיה הפוטנציאלית תקטן עם x
ולכן:

$$\boxed{m > \frac{M\sin\theta}{2}}$$

ב. נחשב כעת את האנרגיה הקינטית שיש במערכת.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\underset{\text{סיבוב הדיסקה}}{\omega^2} + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

כאמור, $y=2x$, אולם כעת אנו צריכים גם לקשר בין סיבוב הדיסקה ו-$\dot{x}$. היות ומרחק מרכז הדיסקה מנקודת (ציר) הסיבוב הוא R, נקבל:

$$\omega = \dot{x}/R$$

(2)

$$E_{kin} = \left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{2}I_{cm}/R^2 + 2m\right)\dot{x}^2$$ לכן האנרגיה הקינטית היא:

האנרגיה הכוללת היא:

(1) $$E_{TOT} = E_{kin} + U_{pot} =$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{2}I_{cm}/R^2 + 2m\right)\dot{x}^2 + (Mg\sin\theta - 2mg)x$$

היות והאנרגיה הכוללת קבועה, נגזור לפי הזמן:

$$0 = \frac{dE_{TOT}}{dt} = 2\left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{2}I_{cm}/R^2 + 2m\right)\dot{x}\ddot{x} + (Mg\sin\theta - 2mg)\dot{x}$$

נחלק ב- $\dot{x}$ ונקבל ש- $\ddot{x}$ הוא:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2m - Mg\sin\theta}{M + I_{cm}/R^2 + 4m}} \;\underset{\uparrow}{=}\; \boxed{\frac{2m - Mg\sin\theta}{3M/2 + 4m}}$$

(עבור דיסקה נתונה) $I_{cm} = \tfrac{1}{2}MR^2$

3. כעת יש להוסיף את העובדה שכשהגלגלת מסתובבת יש לה אנרגיה קינטית. התוספת היא:

$$\underbrace{E_{kin,o2}}_{\text{דיסקה שניה}} = \tfrac{1}{2}I\dot{\omega}_2^2$$

אולם הפעם הקשר הוא: $\dot{\omega}_2 = \dot{y}/R = 2\dot{x}/R$

ולכן: $$E_{kin,o2} = \tfrac{1}{2}I\frac{(2\dot{x})^2}{R^2} = 2\,I/R^2\,\dot{x}^2$$

ולכן, משוואה (1) לעיל תהיה:

$$E_{TOT} = E_{kin} + U_{pot} = \left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{2}I_{cm}/R^2 + 2m + 2I_{cm}/R^2\right)\dot{x}^2 + (Mg\sin\theta - 2mg)x$$

היות והאנרגיה הכוללת עדיין קבועה, נגזור לפי הזמן ונקבל:

$$0 = \frac{dE_{TOT}}{dt} = 2\left(\tfrac{1}{2}M + 2\tfrac{1}{2}I_{cm}/R^2 + 2m\right)\dot{x}\ddot{x} + (Mg\sin\theta - 2mg)\dot{x}$$

נחלק ב- $\dot{x}$ ונקבל את $\ddot{x}$:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2m - Mg\sin\theta}{\frac{7M}{2} + 4m}}$$

(אחרי הצבת $I_{cm} = \tfrac{1}{2}MR^2$)

פתרון שאלה 3

א) נסמן את מערכת החללית ב-S' ומערכת כדו״א ב-S.
זמן שידור האות הוא t_0 במערכת החללית.
יש לנו שני ארועים במרחב-זמן

(סימון (ct,x))

A': $(ct_0, 0)$ שידור מקצה אחד

B': (ct_0, l_0) שידור מקצה שני

במערכת כדו״א, ע״י טרנס׳ לורנץ, המאורעות יהיו:

$$A: \left(\gamma(ct_0+\beta\cdot 0), \gamma(0+\beta t_0 c)\right)$$

$$B: \left(\gamma(ct_0+\beta l_0), \gamma(l_0+\beta t_0 c)\right)$$

הפרש הזמנים ברגע השידור: $\Rightarrow \Delta t_{\text{שידור}} = t_B - t_A = \frac{\gamma\beta l_0}{c}$

הפרש המרחקים בין נקודות השידור: $\Delta x_{\text{שידור}} = x_B - x_A = \gamma l_0$

סה״כ הפרש הזמן בהגעת האותות יהיה

$$\Delta t = \Delta t_{\text{שידור}} + \frac{\Delta x}{c} = \frac{\gamma l_0}{c}(1+\beta) = \sqrt{3}\,\frac{l_0}{c}$$

ניתן היה לפתור את השאלה גם ע״י שימוש באפקט דופלר.

ב) נרשום את וקטורי תנע-אנרגיה לפני ואחרי (u' מהירות אחרי התנגשות)

	אלקטרון	פוטון
לפני	$(\gamma m_0 c^2, -\gamma m_0 u)$	$(Q, \frac{Q}{c})$
אחרי	$(\gamma' m_0 c^2, \gamma' m_0 u')$	$(Q, -\frac{Q}{c})$

מכיוון שיש שימור תנע-אנרגיה, נקבל משימור רכיב האנרגיה $\gamma' = \gamma$ ש- $u' = -u$

משימור תנע נקבל $\frac{Q}{c} = \gamma m_0 u$

ניתן לפשט משוואה זו ולקבל $u = \frac{Qc}{\sqrt{m_0^2 c^4 + Q^2}}$

בס"ד

ג) נרשום את וקטורי תנע-אנרגיה לפני ואחרי הפליטה:

לפני $(m_0c^2, 0)$

אחרי: מסה - $(\gamma m_f c^2, \gamma m_f u)$ ופוטון - $(Q, -\frac{Q}{c})$

המסה חייבת להשתנות על מנת לשמר אנרגיה.

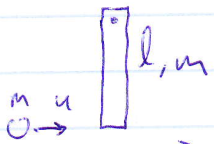
משימור תנע נקבל $\gamma m_f u = \frac{Q}{c}$

$$\Rightarrow \gamma m_f = \frac{Q}{uc}$$

משימור אנרגיה נקבל $m_0c^2 = Q + \gamma m_f c^2 = Q + \frac{Qc}{u}$

$$\Rightarrow u = \frac{Qc}{m_0c^2 - Q}$$

תשובות



4. שימור תנ"ע:

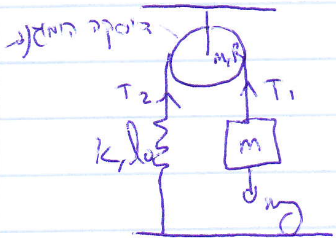
$$|\vec{L}_i| = |m\vec{r}\times\vec{u}| = mlu$$
$$|L_f| = I\omega = (I_{\text{מוט}} + I_{\text{כדור}})\omega = \frac{4}{3}ml^2\omega$$
$$I_{\text{מוט}} = \int dm\, r_\perp^2 = \int y^2 \frac{m}{l} dy = \frac{1}{3}ml^2 \qquad I_{\text{כדור}} = \int dm\, r_\perp^2 = ml^2$$

$$mlu = \frac{4}{3}ml^2\omega \rightarrow \omega = \frac{3}{4}\frac{u}{l}$$

שימור אנרגיה:

הגובה של מרכז המסה בהתחלה

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 = E_f = 2mg\frac{3}{4}l$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}ml^2\right)\frac{9}{16}\frac{u^2}{l^2} = \frac{3}{2}mgl \rightarrow u = 2\sqrt{gl}$$



5. $I = \frac{1}{2}mr^2 \leftarrow$ דיסקה הומוגנית

בש"מ

$$T_1R - T_2R = \tau = \dot{L} = I\dot{\omega} \overset{\text{בש"מ}}{=} 0 \rightarrow T_1 = T_2$$
$$\begin{cases} mg = T \\ T = k(l - l_0) \end{cases} \rightarrow l = l_0 + \frac{mg}{k}$$

עוד...

בעזרת אנרגיה:

$$E_{tot} = E_{\text{קפיץ}} + E_{k\ \text{משקולת}} + E_{\text{סיבובי}} + E_{\text{גובה}}$$
$$= \frac{1}{2}k\underbrace{y^2}_{y+\frac{mg}{k}} + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{I}_{\frac{1}{2}mR^2}\underbrace{\omega^2}_{\frac{v}{R}} - mgy$$

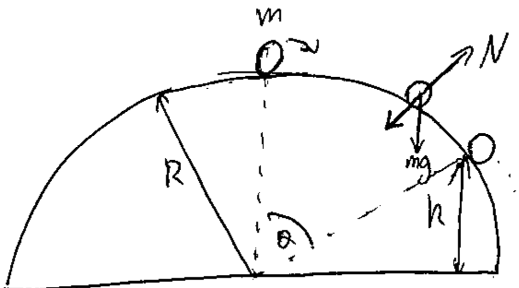
(*) מוזז עד דיוק, לא משנה את התנועה

$$0 = \dot{E}_{tot} = ky\dot{y} + \frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y} - mg\dot{y}$$
$$0 = ky + \frac{3}{2}m\ddot{y} - mg = 0 \rightarrow y = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k},\ \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

בעזרת כוחות: $y = x$

$$(\underbrace{T_1}_{mg - m\ddot{x}} - \underbrace{T_2}_{kx\ (x+\frac{mg}{k}\ (*))})R = I\dot{\omega} = \frac{1}{2}mR\ddot{x}$$
$$\frac{3}{2}mR\ddot{x} + kx - mgR = 0 \rightarrow x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k},\ \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

6. נתון: כדור הומוגני ברדיוס r ומסה m
על כיפה כדורית ברדיוס R, בשיא הגובה
מתחיל ממנוחה, מתגלגל ללא החלקה



צ"ל: הזווית θ ביחס לאנך בה הכדור עוזב
את פני הכיפה

פתרון: שאלה זו ניתנה בתו"ב וו, ופתרונה פורסם לפני המבחן - שאלת מתנה!

שקול הכוחות על הכדור בכיוון הרדיאלי הוא

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R+r}$$

(מרכז הכדור נע בתנועה מעגלית ברדיוס $R+r$)

הניתוק מתקבל כאשר $N=0$ $\Leftarrow$

$$v^2 = gh \Leftarrow \frac{mv^2}{R+r} = mg\cos\theta = \frac{mgh}{R+r}$$

משמור אנרגיה,

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 =$$

כאשר $I = \frac{2mr^2}{5}$

$$= m\left(gh + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}r^2\omega^2\right) =$$

לפי $v = \omega r$

$$= m\left(gh + \frac{7}{10}v^2\right) = mg(R+r)$$

בהתחלה, פוטנציאלית בלבד

$$\Downarrow$$

$$\frac{7}{10}v^2 + gh = g(R+r)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{17}{10}\cancel{g}h = \cancel{g}(R+r)$$

$$h = \frac{10}{17}(R+r)$$

$$\cos\theta = \frac{h}{R+r} = \frac{10}{17}$$

$$\boxed{\theta = 0.942}$$

7. חלקיק במסה m_0 נמצא במנוחה.

הוא מתפרק לשני חלקיקים במסות מנוחה m_1, m_2.

קבל: אנרגיות ותנעים לשני החלקיקים

פתרון: על מנת לקיים שימור תנע במערכת המעבדה (בה m_0 במנוחה), החלקיקים חייבים להיות במימד אחד, נסמנו x.

לפני: $E_0 = m_0c^2$, $P_0 = (0,0,0)$

אחרי:

שימור אנרגיה

$$E_1 = E_1 \qquad c^2P_1^2 = E_1^2 - m_1^2c^4$$

$$E_2 = E_0 - E_1 \qquad c^2P_2^2 = E_2^2 - m_2^2c^4$$

$E_1 + E_2 = E_0$ ומשימור התנע נדרש

$$P_1 = -P_2$$
$$\Downarrow$$
$$P_1^2 = P_2^2$$
$$\Downarrow$$
$$E_1^2 - m_1^2c^4 = E_2^2 - m_2^2c^4 = E_0^2 + E_1^2 - 2E_0E_1 - m_2^2c^4$$
$$\Downarrow$$
$$m_2^2c^4 - m_1^2c^4 - m_0^2c^4 = -2m_0c^2E_1$$

$$\boxed{E_1 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}c^2}$$

ואפשר לקבל זאת גם מסימטריה $E_2 = m_0c^2 - \frac{m_0^2+m_1^2-m_2^2}{2m_0}c^2 = \boxed{\frac{m_0^2+m_2^2-m_1^2}{2m_0}c^2 = E_2}$

$$P_1^2 = \left(\frac{m_0^2+m_1^2-m_2^2}{2m_0}\right)^2c^2 - m_1^2c^2 = \left[\frac{m_0^4+m_1^4+m_2^4+2m_0^2m_1^2-2m_0^2m_2^2-2m_1^2m_2^2}{4m_0^2} - m_1^2\right.$$

$$= \left[\frac{m_0^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{m_1^4}{m_0^2} + \frac{1}{4}\frac{m_2^4}{m_0^2} - \frac{1}{2}m_1^2 - \frac{1}{2}m_2^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2m_2^2}{m_0^2}\right]c^2$$

ומשיקולי סימטריה מקבלים (כנ"ל) $P_2^2 = P_1^2$

כלומר $\boxed{P_1 = -P_2 = \frac{c}{2}\sqrt{m_0^2 + \frac{m_1^4}{m_0^2} + \frac{m_2^4}{m_0^2} - 2m_1^2 - 2m_2^2 - 2\frac{m_1^2m_2^2}{m_0^2}}}$

וכך היחידות מתאימות.