פרופ' ניר שביב

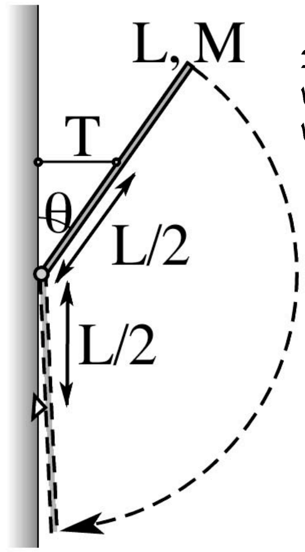
מכניקה ויחסות פרטית 77101

מבחן מועד א' תלפיות, סמסטר חורף תשס"ז

- המבחן הוא ללא כל חומר עזר, פרט לפריטים הבאים:
  - 2 דפי נוסחאות (4 עמודי A4)
  - מחשבון
  - חוברת אינטגרלים או ספר עזר במתמטיקה (Mathematical Handbook)
- יש לנמק את התשובות. תשובה לא מנומקת לא תתקבל.
- משך המבחן שלוש שעות.
- בבחינה 2 חלקים:
  - בחלק א' יש לענות על 2 מתוך 3 שאלות. (58 נק').
  - בחלק ב' יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות. (42 נק').
- יש לכתוב בצד שמאל של המחברת בלבד, זאת כדי שניתן יהיה לסרוק אותה. דפים כתובים בצד ימין לא יסרקו ולא תוכלו לראותם אחרי הבדיקה!
- יש לכתוב את פתרון השאלות השונות בעמודים נפרדים, ולהקיף תשובות סופיות במסגרת. לפני מסירת הבחינה, נא לציין על הצד הפנימי של כנף העטיפה את השאלות שנבחרו לבדיקה. תודה!
- כמו בחיים האמיתיים, בשאלות יתכנו נתונים שאינם דרושים לפתרון הבעיה.
- שימו לב כי בסוף השאלות הגדולות ישנם סעיפים פחותי נקודות אותם רצוי להשאיר לסוף המבחן.

בהצלחה!

חלק א'



1. נתון מוט אחיד, בעל מסה M ואורך L. מוט זה מחובר לקיר בעזרת ציר בקצהו, וקשור באמצעו לאותו הקיר על ידי חוט אופקי. המוט יוצר זווית θ יחסית לאנך. ברגע מסוים, גוזרים את החוט. המוט נופל ופוגע באמצעו בזיז בקיר.

(א) מהי המתיחות T בחוט לפני גזירתו?

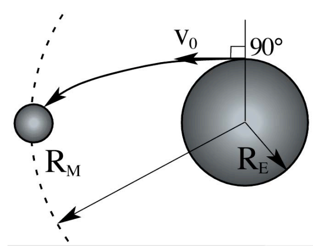
(ב) מהי המהירות הזוויתית של המוט רגע לפני פגיעתו בקיר?

(ג) מהו סך המתקף, דהיינו $\int F dt$, אותו ירגיש הציר כתוצאה מהפגיעה בקיר אם ההתנגשות היא פלסטית?

(ד) (2 נק') כמה זמן תארך נפילת המוט עד פגיעתו בקיר? בסעיף זה רצוי להשאיר את התוצאה בעזרת אינטגרל על גדלים חסרי מימדים.

2. נתון יקום בו כח המשיכה מקיים: $F_g = -\alpha m_1 m_2 / r^3$.

(א) נתון כי לעולם רדיוס R_E ובפני השטח תאוצת משיכה g. מה תהיה מהירות הבריחה מעולמינו?



(ב) נתון כי סביב העולם ישנו ירח המבצע תנועה מעגלית בזמן מחזור P נתון. מהו רדיוס מסלול זה? (נתונים כמובן גם אותם הנתונים מהסעיף הקודם).

(ג) מה צריכה להיות מהירותו של פגז כדי שזה יוכל להגיע אל אותו ירח אם הוא נורה אופקית? (אין צורך להציב את רדיוס מסלולו של הירח מהסעיף הקודם, כמו כן, ניתן להניח כי העולם אינו מסתובב).

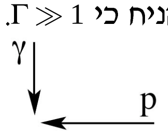
(ד) (2 נק') האם יתכנו מסלולים אליפטיים בשדה כח זה? אין צורך לחשב אך יש לנמק. האם הגיוני כלל שיהיו "ירחים" בשדה "כבידה" זה?

3. נתון פרוטון ופוטון המתנגשים חזיתית. הפרוטון בעל מסה m_p, ואנרגיה $E_p = \Gamma m_p c^2$. לפוטון אנרגיה E_γ. בתנאים מסוימים מתרחשת הראקציה $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$.

(א) למה שווה האנרגיה הכוללת במערכת המעבדה (לפני ההתנגשות)?

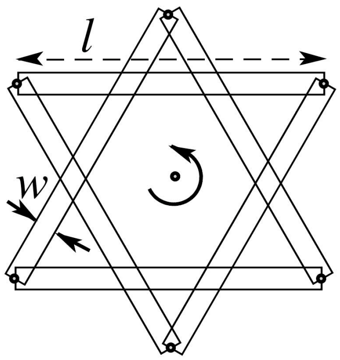
(ב) למה שווה האנרגיה הכוללת במערכת מרכז המסה? (רמז, ישנו גודל הנשמר בין המערכות השונות)

(ג) מהו ה-Γ המינימלי הדרוש לפרוטון על מנת ליצור חלקיק π^0 בעל מסה m_π נתונה? לשם נוחות, ניתן להניח כי הפרוטון מאד יחסותי, דהיינו, ניתן להניח כי $\Gamma \gg 1$.



(ד) (2 נק') אילו הפוטון היה נע בכיוון ניצב לפרוטון, מה היה ה-Γ המינימלי במקרה זה?

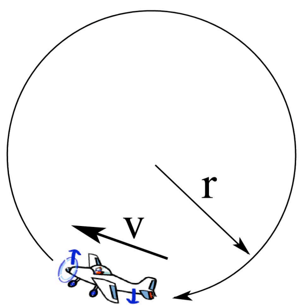
חלק ב'



4. מרכיבים צורת מגן דויד מ-6 קרשים בעלי מסה m כל אחד, אורך l, רוחב w ועובי d. את הקרשים מחברים כך שקצוות הציר הארוך נוגעים זה בזה (כמתואר בציור).

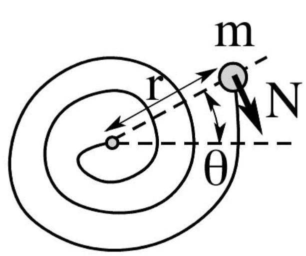
לנוחיותכם, מומנט האינרציה של מלבן $a \times b$ לסיבוב סביב ציר העובר במרכזו והניצב לפני המלבן, נתון ע"י $I = (a^2 + b^2)/12$.

למה שווה מומנט האינרציה לסיבוב סביב ציר הניצב למישור המגן דויד?



5. לפרופלור של מטוס מומנט אינרציה I נתון. המטוס מבצע לולאה ברדיוס r כשהוא נע במהירות v והפרופלור מסתובב במהירות זוויתית ω. הטייס רואה את הפרופלור מסתובב בכיוון השעון. נתון גם כי מסת המטוס M וצבע עיניו של הטייס כחול.

בנוסף למומנט שגורם למטוס להסתובב כלפי למעלה, על הטי-יס להפעיל מומנט נוסף כך שמסלול המטוס ישאר כלולאה אנכית. מה גודלו והכיוונו של מומנט זה?



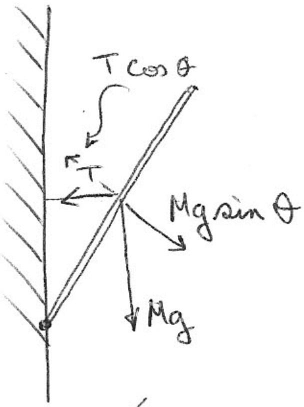
6. מטוטלת פיתול מורכבת ממסה m בקצה קפיץ ספירלי חסר מסה. הקפיץ מקיים שתזוזה בזווית θ גורמת להפעלת מומנט המתנגד להסחה הזוויתית והשווה ל- $N = -\kappa\theta$. κ הוא קבוע הקפיץ של קפיץ הפיתול. המסה נקודתית ונמצאת במרחק r מהראשית.

מהו מקדם הגרר α שיש להעניק לכח הגרר $f_d = -\alpha v$ הפועל על המסה, על מנת שהתנועה החופשית (ללא כוחות חיצוניים) של המערכת תהיה דעיכה אקספוננציאלית ללא רכיב מחזורי?

7. חלקיק בעל מסה m ומטען חשמלי q מאיץ בשדה חשמלי שגודלו $E = E_0 \cos \omega t$.

למה שווה המהירות (או ריבוע המהירות) כתלות בזמן?

<u>שאלה 1</u>



א. שיוויון מומנטים דורש: (סביב הציר)

$$\frac{l}{2} T\cos\theta = \frac{l}{2} Mg \cancel{\cos}^{\sin}\theta$$

$$\Rightarrow \quad T = Mg\,tg\,\theta$$

ב. שימור אנרגיה נותן שהפרש האנרגיה הפוטנציאלית הופך לאנרגיה קינטית:

אין אנרגיה קינטית התחלתית $\left\{ \quad \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = Mg\frac{L}{2}\cos\theta_2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta \right.$

לכן: $$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{MgL}{I}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)$$

נוציא שורש ונפריד משתנים:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{MgL}{I}}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)^{1/2}$$

נפריד משתנים ונבצע אינטגרציה:

$$\int_{t=0}^{t} dt = t = \sqrt{\frac{I}{MgL}} \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=\theta_\pi} \frac{d\theta}{(\cos\theta_0 - \cos\theta)^{1/2}}$$

אינטגרל זה לא ניתן לבצע אנליטית (~~א~~ רק אם מגדירים פונקציה חדשה...)

ג. המהירות הזוויתית:
(שוב, משימור אנרגיה)

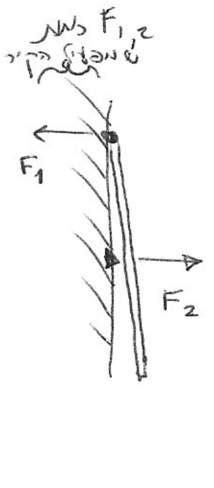
$$\dot{\theta}_f^2 = \frac{MgL}{I}\left(\cos\theta_0 - \underbrace{\cos\theta_f}_{-1}\right)$$

$$\dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{MgL}{I}}\left(\cos\theta_0 + 1\right)^{1/2}$$

ד. ברגע הפגיעה, נוכל לפרק את התנועה כתנועת מרכז המסה + סיבוב סביב מרכז המסה:

$$v_{cm} = \frac{L}{2}\cdot\underbrace{\omega}_{\dot{\theta}_f} \qquad \omega_{cm} = \omega$$

(בחירה זו נותנת שקצה אחד אינו נע ואילו השני נע במהירות $L\omega$).



F_2 אינו מפעיל מומנט על המוט (יחסית למרכז המסה) ולכן כל

שינוי התנע הזוויתי של המוט (יחסית למ"מ) נופל בדיוק על F_1:

$$\int N\,dt = \frac{L}{2}\cdot\int F_1\,dt = \Delta L = I_{cm}\,\omega \overset{\text{שטיינר}}{=} \left(I - \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{L}{2}\right)^2\right)\omega$$

ובעזרת $\dot{\theta}_f$:

$$\int F_1\,dt = \left(\frac{2I}{L} - \frac{1}{4}ML\right)\sqrt{\frac{MgL}{I}}\left(1 + \cos\theta_0\right)^{1/2}$$

שאלה 2:

א.

$$F_g = -\frac{\alpha m_1 m_2}{r^3} \rightsquigarrow U = -\int F\,dr \underset{\text{יחסית ל-}\infty}{=} -\frac{\alpha m_1 m_2}{2r^2}$$

בשפת כדוה"א:

$$F_g = -\underbrace{\frac{\alpha M_E}{R_E^3}}_{=g} \cdot m_2 = -g\,m_2$$

לכן הפוטנציאל הוא

$$U = -\frac{\alpha m_1 m_2}{2r^2} = -\frac{\alpha m_1 m_2}{2R_E^3}\,\frac{R_E^3}{r^2} = -\frac{g}{2}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 R_E m_1$$

מהירות הבריחה:

$$\underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_{esc}^2 - \frac{g}{2}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 R_E}_{\text{אנרגיה לפני}} = \underbrace{0-0}_{\text{אנרגיה אחרי}}$$

לכן:

$$v_{esc} = \sqrt{g\left(\frac{R_E}{R_E}\right)^2 R_E} = \sqrt{gR_E}$$

הביטוי הזה שונה מזה ה"קלאסי" בפקטור 2 שבתוך השורש (שכאן אין).

ב. שיוון כוחות דורש:

$$m_1 \omega^2 R_M = g\left(\frac{R_E}{R_M}\right)^3 m_1$$

$$R_M^4 = g R_E^3 \omega^{-2} \underset{\omega = 2\pi/p}{=} g R_E^3 \frac{p^2}{4\pi^2} \Rightarrow R_M = \left(gR_E^3 p^2 / 4\pi^2\right)^{1/4}$$

ג. היות והתנע הזוויתי נשמר נקבל:

מסת פגז

$$l = m_1 \underbrace{v_0}_{\substack{\text{מהירות אופקית}\\ \text{התחלתית,}}} R_E = m_1 \underbrace{v_\theta}_{\substack{\text{רכיב משיקי}\\ \text{בהגיעו למסלול הירח.}}} R_M \Rightarrow v_\theta = v_0 \frac{R_E}{R_M}$$

שימור אנרגיה גורר:

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 - \frac{g}{2}\left(\frac{R_E}{R_E}\right)^2 R_E m_1 = \frac{1}{2}m_1 v_\theta^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m_1 v_r^2}_{} - \frac{g}{2}\left(\frac{R_E}{R_M}\right)^2 R_E m_1$$

במינימום =0 ולכן >

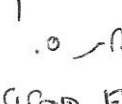
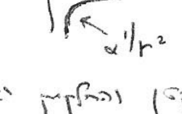
נציב את הביטוי עבור

אחרי צמצום ב- m_1 והצבת v_θ:

$$v_0^2 > v_0^2\left(\frac{R_E}{R_M}\right)^2 + gR_E\left(1-\left(\frac{R_E}{R_M}\right)^2\right)$$

$$v_0^2\left(1-\left(\frac{R_E}{R_M}\right)^2\right) > gR_E\left(1-\left(\frac{R_E}{R_M}\right)^2\right) \Rightarrow v_0^2 > gR_E$$

המהירות ההתחלתית גדולה יותר ממהירות הבריחה! זה מוביל אותנו לסעיף ד':

ד. היות והפוטנציאל האפקטיבי מכיל את הפוטנציאל, שמתנהג כ- $1/r^2$ ואת התרומה מהתנע הזוויתי שמתנהגת גם כ- $1/r^2$ ישנן שתי אפשרויות:  ו-  משמעות הדבר:

(1) אין פתרונות אליפטיים, רק פתרון מעגלי עם אנרגיה כוללת 0.

(2) אם $E>0$, המסלול יגדל והחלקיק יגיע ל- ∞. אם $E<0$ המסלול יקטן והחלקיק יגיע לראשית.

(3) לא יכולים להיות ירחים. כל הפרעה או שתגדיל את E והירח יברח או שתקטין את E והוא יפול.

שאלה 3:

א. הארבע תנע של הפוטון והפרוטון:

$$P^\mu_\gamma : \left(E_\gamma/c ,\, 0 ,\, 0 ,\, E_\gamma/c \right)$$

$$P^\mu_p = \left(-|\vec{P}_p| ,\, 0 ,\, 0 ,\, \Gamma m_p c \right) =$$

$$= \left(-\sqrt{\Gamma^2-1}\, m_p c ,\, 0 ,\, 0 ,\, \Gamma m_p c \right)$$

בכיוון $-\hat{x}$

$$|\vec{P}_p|^2 c^2 - E_p^2 = -m_p c^2$$

$$\Longleftarrow |\vec{P}_p|^2 c^2 = E_p^2 - (m_p c^2)^2 = (\Gamma^2 - 1)(m_p c^2)^2$$

סך ה- 4 תנע במעבדה:

$$P^\mu_{tot} = \left(E_\gamma/c - \sqrt{\Gamma^2-1}\, m_p c ,\, 0 ,\, 0 ,\, \underline{\Gamma m_p c + E_\gamma} \right)$$

ב. במערכת מרכז המסה, הארבע תנע נראה:

$$P^\mu_{tot,cm} = \left(\underset{\smile}{0} ,\, 0 ,\, 0 ,\, E_{cm}/c \right)$$

אין תנע במע' מ"מ.

נשתמש בעובדה ש- $|\vec{p}|^2 - E^2 = const$. נחשב את הגודל במעבדה ובמרכז המסה!

נכפיל ב- c^2 את הביטוי ונקבל:

$$\underbrace{\left(E_\gamma - \sqrt{\Gamma^2-1}\, m_p c^2 \right)^2 - \left(E_\gamma + \Gamma m_p c^2 \right)}_{\text{מחושב במעבדה.}} = 0 - E_{cm}^2$$

נפתח את הסוגריים!

$$\underset{(1)}{E_\gamma^2} - 2\sqrt{\Gamma^2-1}\overset{E_\gamma}{\vee} m_p c^2 + \underset{\shortparallel}{(\Gamma^2-1)(m_p c^2)^2} - \underset{(1)}{E_\gamma^2} - 2 E_\gamma \Gamma m_p c^2 - \underset{\shortparallel}{\Gamma^2 m_p c^2} = -E_{cm}^2$$

נחבר ונצמצם:

$$E_{cm}^2 = 2 E_\gamma m_p c^2 \left(\sqrt{\Gamma^2-1} + \Gamma \right) + \left(\underbrace{\Gamma^2 - (\Gamma^2-1)}_{1} \right) (m_p c^2)^2$$

$$E_{cm}^2 = 2 E_\gamma m_p c^2 \left(\sqrt{\Gamma^2-1} + \Gamma \right) + (m_p c^2)^2$$

ג. כדי שהריאקציה תוכל להתרחש:

$$E_{cm} > (m_\pi c^2 + m_p c^2)$$

תחת ההנחה ש- $\Gamma \gg 1 \Leftarrow \Gamma \approx \sqrt{\Gamma^2-1}$ ולכן:

$$E_{cm}^2 = 2 E_\gamma m_p c^2 \Gamma \cdot 2 + (m_p c^2)^2 > (m_\pi c^2 + m_p c^2)^2$$

$$\Gamma > \frac{(m_\pi c^2 + m_p c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{4 E_\gamma m_p c^2} = \frac{(m_\pi/m_p)^2 + 2\, m_\pi/m_p}{4 (E_\gamma / m_p c^2)}$$

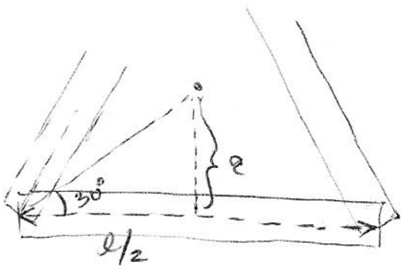
שאלה 4:

מומנט האינרציה של קרש סביב מרכזו: $I_{1cm} = \frac{m_1}{12}(l^2+w^2)$

כל קרש מסתובב לא סביב מ"מ אלא בהסטה של $\frac{l}{2}tg30°$

לכן, לפי שטיינר: $I_1 = \frac{1}{12}(l^2+w^2) + \frac{l}{4}tg^2 30°$

מומנט האינרציה של כל המערכת יהיה $I = 6I_1 = \frac{1}{2}(l^2(1+3tg^2 30°)+w^2)$



$$\frac{a}{l/2} = tg30° \Rightarrow a = \frac{l}{2}tg30°$$

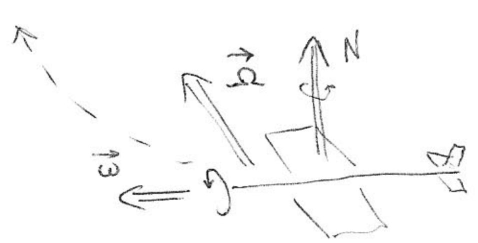
שאלה 5:

תנע זוויתי של מטוס: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

אולם המטוס מסתובב כלפי מעלה. $\Rightarrow$ פועל מומנט על המטוס לעשות זאת:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\underbrace{\vec{\Omega}}_{\text{וקטור סיבוב של מטוס}}\times\vec{\omega}$$

$$N = \frac{I v \omega}{r} \qquad |\Omega| = \frac{v}{r}$$



$I\omega = I\dot\theta$

שאלה ט:

$\underbrace{\frac{d\hat{L}}{dt}}$ $= N$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N = -k\theta - f_d\cdot r = -\alpha \vec{v}\cdot r = -\alpha\dot\theta r^2$$

סה"כ

$$I\ddot\theta + \alpha r^2\dot\theta + K\theta = 0$$

אם מחפשים פתרונות מהצורה $e^{+\lambda t}$ אזי יש לפתור את המשוואה:

$$\overset{a}{I}\lambda^2 + \overset{b}{\overbrace{\alpha r^2}}\lambda + \overset{c}{K}\theta = 0$$

אם מחפשים את α עבורו הפתרונות מפסיקים להיות הרמוניים

צריך שה- דלתא בפתרון יהיה 0:

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \alpha^2 r^4 = 4IK$$

$$\alpha = \frac{2\sqrt{IK}}{r^2} \underset{I=Mr^2}{=} \frac{2\sqrt{mK}}{r}$$

שאלה ז: הכח החשמלי הוא: $\vec{F} = q\vec{E}$. מנב שני $\frac{d\bar{p}}{dt} = F$

ולכן:

$$\frac{dp}{dt} = qE = qE_0\cos\omega t$$

אינטגרציה בזמן: (תחת ההנחה שהחלקיק מתחיל ממנוחה):

$$P = \frac{qE_0}{\omega}\sin\omega t \Rightarrow \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{qE_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$m^2v^2 = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{qE_0}{\omega}\right)^2\sin^2\omega t$$

$$v^2\left(m^2 + \left(\frac{qE_0}{\omega c}\right)^2\sin^2\omega t\right) = \left(\frac{qE_0}{\omega}\right)^2\sin^2\omega t$$

$$v^2 = \frac{\left(\frac{qE_0}{\omega}\right)^2\sin^2\omega t}{m^2 + \left(\frac{qE_0}{\omega c}\right)^2\sin^2\omega t} = \frac{\left(\frac{qE_0c}{\omega}/mc^2\right)\sin^2\omega t}{1 + \underbrace{\left(\frac{qE_0c}{\omega}/mc^2\right)}\sin^2\omega t}\cdot c$$

פרמטר חסר יחידות שנותן אם השדה החשמלי יכול להאיץ את החלקיק למהירויות יחסותיות