28.11.04

כעת משראינו כיצד מתקבל פוטנציאל הרמוני ממינימום של פוטנציאלים שונים,
עלינו לפתור את משוואת התנועה.

המשוואה אותה אנו צריכים לפתור היא:

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0)$$

ראינו בעבר כי ניתן לפתור בעיה לא הומוגנית זו (בגלל האיבר kx_0)
ע"י פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית + פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית.
הפעם נפתור ע"י החלפת משתנים.

נגדיר: $\xi \equiv x - x_0$ ואז $\dot{\xi} = \dot{x}$ ו- $\ddot{\xi} = \ddot{x}$ ונקבל משוואה הומוגנית:

$$m\ddot{\xi} = -k\xi$$

אנו מחפשים פונקציה שהנגזרת השניה שלה פרופורציונית לפונקציה עצמה,
ננחש פתרון מהצורה:

$$\xi = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$-mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -kA\cos(\omega t + \varphi_0)$$

נמצא שהמשוואה מתקיימת אם: $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ω - התדירות הזויתית. (רדיאנים לשניה)

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ - התדירות (מחזורים לשניה)

$P = 1/f$ - זמן מחזור של התנודה.

28.11.04

שימו לב כי ישנם שני קבועי אינטגרציה למשוואה שהיא <u>מסדר שני</u>

(דהיינו, מופיעות נגזרות שהן עד סדר שני) ולכן הפתרון שנמצא הינו הכללי ביותר.

ניתן גם לכתוב את הפתרון בצורה:

$$\xi = A\cos(\omega t+\varphi_0) = A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)$$

ועדין לתאר ע"י שני קבועים.

הפתרון עבור x הוא:

$$x = \xi + x_0 = x_0 + A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

למה שווים A ו-φ_0? תלוי בתנאי התחלה!

<u>דוגמא:</u>

נניח כי נתון שבזמן $t=0$ המהירות היתה אפס ואילו הקפיץ מתוח עד x_i.

מה ערכם של קבועי האינטגרציה?

<u>פתרון:</u> נרשום את הפתרון בעזרת sin ו-cos לשם נוחות.

$$x = x_0 + A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$x(t=0) = x_0 + A_1 \overset{\text{נתון}}{=} x_i$$

$$v(t=0) = \frac{dx}{dt} = A_2\,\omega\,\overbrace{\cos(\omega t)}^{=1} \overset{\text{נתון}}{=} 0$$

לכן:

$$A_1 = (x_i - x_0)$$

$$A_2 = 0$$

והפתרון המקיים את תנאי ההתחלה:

$$x = x_0 + (x_i - x_0)\cos(\omega t)$$

דוגמא שניה:

נניח כי ב- $t=0$ הקפיץ היה בנקודת שיווי משקל ינק עם מהירות v_i. מה ערכם של קבועי האינטגרציה הפעם?

פתרון:

$$x(t=0) = x_0 + A \overset{\text{נתון}}{=} x_0$$

$$v(t=0) = \omega B \overset{\text{נתון}}{=} v_i \implies A=0\ ;\ B = v_i/\omega \quad \text{:הפעם}$$

ולכן הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה הפעם הוא:

$$x = x_0 + \frac{v_i}{\omega}\sin(\omega t)$$

פתרון האוסצילטור ההרמוני בעזרת אנרגיה:

היות והכוח הוא תלוי מיקום, הוא משמר. נרשום לכן את האנרגיה של המערכת:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}k\xi^2$$

נגדיר שוב $\xi = x - x_0$

נקבל:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \underbrace{\frac{2E}{m}}_{\equiv a\ (\text{נגדיר})} - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\equiv b}\xi^2 = a - b\xi$$

(אנו מגדירים את a ו- b לשם נוחות כדי לא לכתוב יותר מדי אותיות...)

אינטגרציה:

$$\int_{\xi(t=0)}^{\xi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{a-b\xi^2}} = \int_{t=0}^{t} dt$$

נפתח ספר אינטגרלים ונמצא:

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,\xi\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi(t)} = t - t_0$$

ע"י הגדרה מחדש של קבוע האינטגרציה:

$$\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,\xi\right) = \sqrt{b}\,(t - \tilde{t})$$

28.11.04

או לחילופין:

$$\xi = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\sin\left(\sqrt{b}\,(t-\tilde{t})\right)$$

הצבה של a ו- b נותנת:

$$\xi = \sqrt{\frac{2E}{\cancel{m}}\,\frac{\cancel{m}}{k}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,(t-\tilde{t})\right)$$

אם נגדיר: $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ ונגדיר מחדש את קבוע האינטגרציה (עוד לא נקבע ערכו ולכן מותר לנו לעשות כל הצבה הנוחה לנו).

$$\xi = \sqrt{\frac{2E}{k}}\,\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$$x = x_0 + \sqrt{2E/k}\,\sin(\omega t + \varphi_0)$$

הפעם המשוואה שהייתה לנו היא משוואה מסדר ראשון, ולכן הופיע רק קבוע אינטגרציה אחד. הסיבה היא ש- E הוא כבר קבוע אינטגרציה שהתקבל מתוך את משוואות התנועה השגנו רשימור אנרגיה (כאשר כבר עשינו אינטגרציה אחת עוד קודם!).

ע"י שינוי פאזה φ_0 ניתן כמובן לקבל cos ובדיוק כפי שהתקבל קודם.

אנרגיה ממוצעת באוסצילטור הרמוני

למה שווה האנרגיה הקינטית הממוצעת של אוסצילטור הרמוני?

$$\underbrace{\overline{K} \equiv \langle K \rangle}_{\text{שני סימונים מקובלים של ממוצע}} = \frac{1}{P}\int_0^P K(t)\,dt = \frac{1}{P}\int_0^P \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

נגזור את $\dot{x}$:

$$x = x_0 + A\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

לכן:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{P}\int_0^P \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\,dt =$$

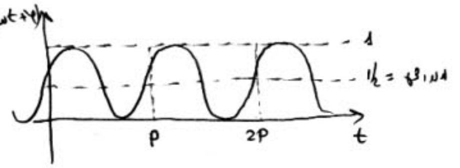
$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{P}\int_0^P \sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$

28.11.04

אולם, $\overline{\sin^2(\omega)}=\frac{1}{2}$, כמו כן, אם מסתכלים על מספר מחזורים שלם מקבלים:

$$\frac{1}{np}\int_0^{np}\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{2}$$

באופן גרפי:



לכן:

$$\langle K\rangle=\frac{1}{4}m\omega^2A^2$$

באופן דומה, האנרגיה הפוטנציאלית הממוצעת:

$$\langle U\rangle=\frac{1}{p}\int_0^{p}\frac{1}{2}k(x-x_0)^2\,dt=\frac{1}{2}kA^2\underbrace{\frac{1}{p}\int_0^{p}\cos^2(\omega t+\varphi_0)\,dt}_{=1/2}$$

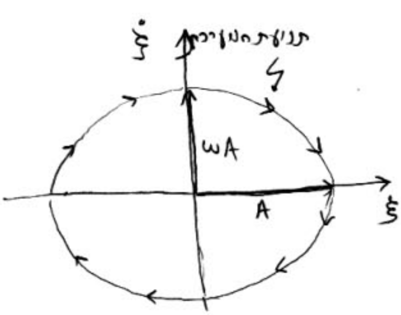
$$\langle U\rangle=\frac{1}{4}kA^2=\frac{1}{4}m\omega^2A=\langle K\rangle\ !$$

$$\omega^2=\frac{k}{m}\longrightarrow k=\omega^2k$$

<u>מסקנות:</u> * האנרגיה של נדנד הרמוני יחסית לאמפליטודה בריבוע. $\left(E=\frac{1}{2}kA^2\right)$

* בממוצע האנרגיה מתחלקת שווה בשווה בין אנרגיה קינטית לאנרגיה פוטנציאלית.

<u>נדנד הרמוני במרחב הפאזה</u>



במרחב של $\{\xi,\dot{\xi}\}$

הנדנד מתואר ע"י תנועה לאורך אליפסה וזאת מפני שרכיב "x" (שהוא ξ) יחסי ל- $\cos(\omega t)$ ואילו רכיב "y" שהוא $\dot{\xi}$ יחסי ל- $\sin(\omega t)$