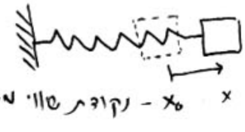
המתנד ההרמוני (אוסצילטור הרמוני).

נדון, הפעם בהרחבה, במתנד ההרמוני. המשוואה המתארת מסה על קפיץ



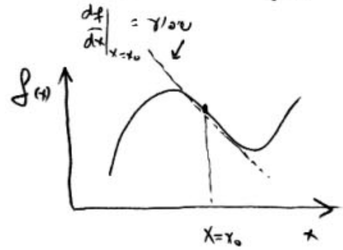
היא:

$$F = -kx \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

חשוב מאוד לציין שבעיית המתנד מופיעה בפיסיקה הרבה מאוד פעמים. הדרך לראות זאת, היא ע"י תיאור פוטנציאל כלשהו בעזרת טור טיילור.

טור טיילור.

- נניח אני רוצה לתאר בקרוב פונקציה כלשהי $f(x)$ בסביבות נקודה $x=x_0$. ב"סדר" 0, הפונקציה שווה בסביבות הנקודה שאני לערכה בנקודה:



סדר 0:

$$f(x) \simeq f(x_0)$$

הסדר הבא: אני יכול לתאר הפונקציה בעזרת הנגזרת שלה:

סדר 1:

$$f(x) \simeq f(x_0) + \text{שיפוע}\,(x-x_0) = f(x_0) + \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)$$

- מה קורה אם במקום את הפונקציה שלי $f(x)$ אני מתאר כקבוע + שיפוע·לינארי: נתאר את הנגזרת שלה כקבוע + שיפוע לינארי? במקרה כזה, נקבל:

סדר 1 לנגזרת:

$$f'(x) \simeq f'(x_0) + \overbrace{\frac{df'}{dx}}^{=\frac{d^2f}{dx^2}}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)$$

זהו הביטוי למעלה עבור $f(x)$, רק שהחלפנו $f(x)$ ב- $f'(x)$.

נבצע כעת אינטגרציה על x, ונקבל

24.11.04

אם נבצע אינטגרציה על הקירוב סדר 1 לנגזרת, נקבל קירוב סדר שני עבור הפונקציה $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x=x_0}^{x} f'(x)\,dx = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x-x_0)^2$$

— מה קורה אם את הנגזרת סדר $(n-1)$ של הפונקציה f שלנו נקרב ע"י קירוב לינארי? במקרה כזה נרשום:

הנגזרת ה-n

$$f^{(n-1)} \simeq f^{(n-1)}(x_0) + \underbrace{\left.\frac{d f^{(n-1)}}{dx}\right|_{x=x_0}}_{f^{(n)}} (x-x_0)$$

נבצע כעת n-1 אינטגרציות:

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(x_0) + \int_{x=x_0}^{x} f^{(n-1)}(x)\,dx = f^{(n-2)}(x_0) + f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f^{(n)}(x-x_0)^2$$

ונמשיך ...

$$f^{(n-3)} = f^{(n-3)}(x_0) + f^{(n-2)}(x_0)(x-x_0) + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} f^{(n)}(x-x_0)^3$$

ונמשיך.... עד שנגיע ל-

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \dots + f^{(n)}\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

זהו טור טיילור. הוא נותן לנו בטוי (מקורב עם n סופי) לפונקציה $f(x)$ בעזרת הנגזרות בנקודה x_0.

מה זה אומר? אם מדובר על קירוב פונקציה סביב המינימום (או מקסימום) שלה, אנחנו מפתחים אותה סביב נקודה x_0 בה $f'(x_0)=0$ (אחרת לא היה מינימום או מקסימום). לכן, אם הנגזרת השניה לא שווה לאפס ניתן לכתוב את $f(x)$ בצורה הבאה.

-3-
24.11.04

סביב מינימום פוטנציאל (אם הנגזרת השניה אינה שווה לאפס!):

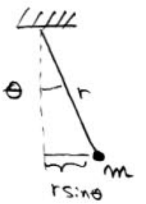
$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0} (x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

(סביב מינימום פוטנציאל!)

אם הנגזרת השניה שווה לאפס, נצטרך לעלות לסדרים גבוהים יותר כדי לתאר את המינימום שלנו. נראה זאת בדוגמא למטה. לרוב הנגזרת השניה אינה אפס ולכן ניתן לקרב את הפוטנציאל שלנו כפרבולה סביב $x=x_0$.

דוגמאות

- מטוטלת מתמטית:



תנע זויתי:

$$\ell = mr\overset{r\dot\theta}{v} = mr^2\dot\theta$$

מומנט כח:

$$N = -mgr\sin\theta$$

משוואת תנועה בעזרת מומנטים:

$$\frac{d\ell}{dt} = N$$

$$\hookrightarrow mr^2\ddot\theta = -mgr\sin\theta$$

כלומר:

$$\ddot\theta = -\frac{g}{r}\sin\theta$$

את ה- $\sin\theta$ ניתן לקרב ע"י פיתוח לטור טיילור:

$$\sin\theta \simeq \underbrace{\sin(\theta=0)}_{=0} + \underbrace{\cos(\theta=0)}_{=1}(x-\underbrace{x_0}_{=0}) + \underbrace{(-)\sin(\theta=0)}_{0}\frac{(x-x_0)^2}{2} + \frac{(-)\cos(\theta=0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots$$

$$\sin\theta \simeq 0 + x + 0 \quad (-)x^3/3! + \dots$$

ז.א. בקירוב הנמוך ביותר, ניתן לרשום:

$$\ddot\theta \simeq -\frac{g}{r}\theta$$

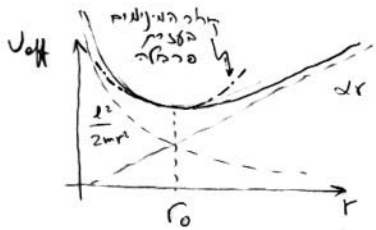
כאן הכח המחזיר (המומנט) יחסי ל- θ ולכן הפוטנציאל יהיה הרמוני.

24.11.04

– <u>דוגמא:</u> פוטנציאל מרכזי עם $U(r)=\alpha r$. במקרה כזה, הפוטנציאל האפקטיבי הוא:

$$U_{eff}(r)=\frac{\ell^2}{2mr^2}+\alpha r$$

והוא נראה כך:



את המינימום פוטנציאל ניתן לקרב בעזרת פרבולה ואת תנועת החלקיק ליד מינימום הפוטנציאל כתנועה הרמונית.

נמצא את המינימום:

תנאי למינימום:

$$\frac{dU_{eff}(r)}{dr}=0$$

$$-\frac{\ell^2}{3mr_0^3}+\alpha=0 \longrightarrow r_0=\left(\frac{\ell^2}{m\alpha}\right)^{1/3}$$

הנגזרת השניה היא:

$$\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}=+\frac{3\ell^2}{mr^4}$$

אולם מעניין אותנו הנגזרת השניה בנקודה $r=r_0$, ולכן נציב את ערך r_0:

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}=\frac{3\ell^2}{m}\frac{m^{4/3}\alpha^{4/3}}{\ell^{8/3}}=\frac{3m^{1/3}\alpha^{4/3}}{\ell^{2/3}}$$

לכן, בקירוב, ניתן לכתוב את הפוטנציאל כ:

אין איבר סדר ראשון כאן כי הנגזרת היא אפס במינימום!

$$U(r)=\underbrace{U(r_0)}_{\text{סתם קבוע}}+\frac{1}{2}U''_{eff}(r-r_0)^2=U(r_0)+\frac{3}{2}\frac{m^{1/3}\alpha^{4/3}}{\ell^{2/3}}\left(r-\left(\frac{\ell^2}{m\alpha}\right)^{1/3}\right)^2$$

משוואת התנועה תהיה כמו של אוסצילטור הרמוני:

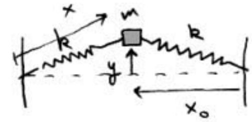
$$m\ddot{r}=-\frac{3m^{1/3}\alpha^{4/3}}{\ell^{2/3}}\left(r-\left(\frac{\ell^2}{m\alpha}\right)^{1/3}\right)$$

24.11.04

דוגמה לפוטנציאל שהמינימום שלו לא הרמוני.

כדי לראות שלא תמיד המינימום הוא הרמוני, נסתכל על הדוגמה הבאה:

נתונה מסה m המחוברת לשני קפיצים כמתואר בציור.



כמו כן נתון כי במצב $y=0$ הקפיצים באורך שיווי משקל x_0 שלהם.

* מהו הפוטנציאל כתלות בהסטה y? מהו הקירוב הנמוך ביותר בו ניתן לתאר אותו?

תחת הסטה y, אורך קפיץ אחד הוא: $x = x_0^2+y^2$

שני קפיצים

הפוטנציאל הוא לכן: $$U(y) = 2\cdot\frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = k\left(\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0\right)^2$$

* כעת נשתמש בטור טיילור על מנת למצוא את האיברים המובילים;

דרך I: נחשב את הנגזרות בדרך ישירה: (אכן!)

$$U'(y_0) = \frac{2k\left(\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0\right)y}{\sqrt{x_0^2+y^2}}\Bigg|_{y=0} = 0$$

$$U''(y_0) = \frac{2k\left(x_0^2\sqrt{x_0^2+y^2}+y^2\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0^3\right)}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}}\Bigg|_{y=0} = 0$$

$$U'''(y_0) = \frac{6k\,x_0^3 y}{(x_0^2+y_0^2)^{5/2}}\Bigg|_{y=0} = 0$$

$$U^{(4)}(y_0) = \frac{6kx_0^3\left(x_0^2-4y^2\right)}{\left(x_0^2+y^2\right)^{7/2}}\Bigg|_{y=0} = \frac{6k}{x_0^2}$$

$$\rightarrow U(y) \simeq \frac{6k}{4!\,x_0^2}y^4 + O(y^6)$$

איברים מסדר y^6 ומעלה.

לא יכול להכיל איבר מהצורה ay^5 כי הפוטנציאל סימטרי ב-y ולכן יכיל רק חזקות זוגיות!

דרך 2: נפתח כבר את השורש:

$$U(y) = k\left(\sqrt{x_0^2+y^2}-x_0\right)^2 \simeq k\left(x_0+\frac{y^2}{2x_0}-x_0\right)^2 = \frac{ky^4}{4x_0^2}$$

אותו הדבר כמו למעלה,

$$\sqrt{x_0^2+y^2} \simeq x_0 + \frac{y^2}{2x_0}$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x_0}}(x-x_0)\Big|_{x_0=0} = 1+\frac{x}{2}$$

פיתוח טיילור