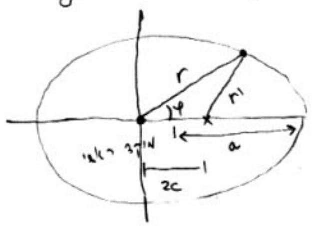
17.10.04

הוכחה כי המסלול שהתקבל היה אכן בצורת אליפסה:

הגדרת אליפסה: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שסכום מרחקיהן משני מוקדי האליפסה הוא קבוע. נהוג לסמן סכום זה כ- $2a$. a נקרא semi-major axis (חצי הציר הראשי).



$$r + r' = 2a$$

נגדיר את המרחק בין המוקדים כ- $2c$.

לפי חוק הקוסינוסים

$$(2c)^2 + r^2 + 2(2c)r\cos\varphi = (r')^2 \quad (*)$$

מצד שני, לפי הגדרה של אליפסה:

$$r + r' = 2a \rightarrow (r')^2 = (2a-r)^2$$
$$= 4a^2 + r^2 - 4ar \quad (*)$$

נחסיר את שתי המשוואות (אי. נציב $(r')^2$ ממשוואה שניה במשוואה ראשונה):

$$4c^2 + \cancel{r^2} + 4cr\cos\varphi = 4a^2 + \cancel{r^2} - 4ar$$

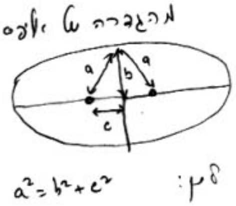
$$c^2 + cr\cos\varphi = a^2 - ar$$

$$ar\left(1 + \frac{c}{a}\cos\varphi\right) = a^2 - c^2$$

אז:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{a^2-c^2}\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right)$$

מהגדרה של אליפסה:



לכן: $a^2 = b^2 + c^2$

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left(1 + \varepsilon\cos\varphi\right)$$

כאשר: $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$

$\Leftarrow$ מסלולי קפלר הם אליפסות עם אקסצנטריות:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu G^2 m_1 m_2}}$$

17.11.04

חוקי קפלר:

חוק ראשון: מסלולי כוכבי הלכת הם אליפסות כאשר השמש באחד מהמוקדים.
ראינו זאת בעמוד קודם:

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha\mu}{\ell^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

חוק שני: כוכב לכת גורף שטחים שווים ביחידת זמן. ראינו זאת משימור תנע:

$$r^2\dot{\varphi} = const = \ell/2\mu$$

חוק שלישי: החוק השלישי אומר:

$$\underbrace{P^2}_{\text{זמן המחזור (סביב השמש)}} \propto \underbrace{a^3}_{\text{חצי ציר הגדול באליפסה}}$$

הוכחה:
מהחוק השני (של קפלר):

$$\frac{\pi ab \text{ שטח כולל}}{P \text{ זמן כולל}} = r^2\dot{\varphi} = const = \ell/_{2\mu}$$

לכן:

$$P^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2 4\mu^2}{\ell^2}$$

אולם ממשוואת המסלול:

$$\frac{a}{b^2} = \frac{Gm_1m_2}{\ell^2}\mu$$

$$\downarrow$$

ולכן:

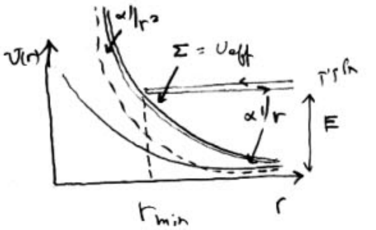
$$\frac{b^2}{\ell^2} = \frac{a}{Gm_1m_2\mu}$$

ונציב זאת בביטוי עבור P^2:

$$P^2 = 4\pi^2 a^2\mu^2 \cdot \frac{a}{Gm_1m_2\mu} \underset{\mu=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}}{\uparrow=} \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\cdot a^3$$

Q.E.D.

כח דחייה חשמלי:



כעת נבחן את המקרה בו: $\alpha = q_1 q_2 > 0$

המתאר דחיה בין מטענים עם מטען בעלי אותו הסימן.

במקרה זה, לפוטנציאל האפקטיבי אין מינימום.

ז.א. חלקיק יגיע מ-∞, עד שכל האנרגיה E הקינטית הרדיאלית תהפוך לאנרגיה פוטנציאלית אפקטיבית, ואז יחזור חזרה ל-∞. למה שווה r_{min}?

משימור אנרגיה בנקודת ה-min:

$$E - q_1 q_2 u - \frac{\ell^2}{2\mu} u^2 = 0$$

משוואה ריבועית עם שני פתרונות!

$$u_{1,2} = -\frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}\left[1 \pm \varepsilon\right]$$

אולם הפעם:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu q_1^2 q_2^2}} > 1$$

ולכן, ישנו פתרון פיסיקלי אחד (עם $u>0$). התנועה תהיה בין $u=0$ לבין אותו u_{max} (המתאים ל- r_{min}):

$$u_{max} = (\varepsilon - 1)\frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}$$

אם נזכר במשוואת המסלול:

$$u = A\cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}$$

הערך המקסימלי של u לפי משוואת המסלול:

$$u_{max} = A - \frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}$$

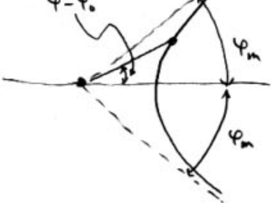
נשווה זאת ל-u_{max} משימור אנרגיה:

$$A - \frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2} = u_{max} = (\varepsilon - 1)\frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}$$

ולכן: $A = \varepsilon \frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}$ כלומר:

$$u = \frac{\mu q_1 q_2}{\ell^2}\left(\underbrace{\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) - 1}\right)$$

התנועה תהיה מוגבלת ב-φ כי הסוגריים צריכים להיות חיוביים.



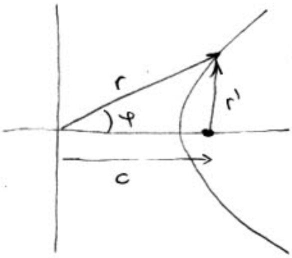
$$\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) - 1 > 0$$

$$\varepsilon\cos\varphi_m - 1 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_m = 1/\varepsilon$$

17.11.04

נראה כי הפעם משוואת המסלול מתארת היפרבולה :

הגדרה גיאומטרית : המקום שהפרש המרחק לשני נקודות קבועות (מוקדים) הוא נתון.



הפעם: $r - r' = 2a$

משפט הקוסינוס:

מצד אחד $r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\varphi$

ומצד שני: $r'^2 = r^2 - 4a^2 - 4ar$

ולכן: $c^2 - rc\cos\varphi = a^2 - ar$

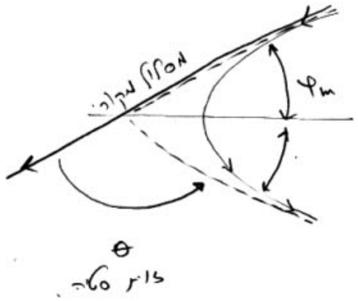
ונקבל: $ar\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right) = a^2 - c^2 = -b^2$

הפעם $c > a$!

סה"כ: $\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}\left(\varepsilon\cos\varphi - 1\right)$

על-ידי השוואה לתוצאות מעמוד קודם $\doteq$ המסלול הוא הפרבולה עם :

$\frac{c}{a} = \varepsilon > 1 \qquad \frac{a}{b^2} = \frac{\mu q_1 q_2}{l^2}$



הסטיה θ הנגרמת מהמסלול המקורי:

$$\theta = \pi - 2\varphi_m = \pi - 2\cos^{-1}(1/\varepsilon)$$

המרחק המינימלי של החלקיק בזמן המעבר:

$$r_{min} = \frac{1}{u_{max}} = \frac{\mu q_1 q_2}{l^2}(\varepsilon - 1)$$

נוכל גם לכתוב:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi_m} = \frac{1}{\sin^2\theta/2} = 1 + ctg^2\frac{\theta}{2}$$

$\theta = \pi - 2\varphi_m$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \rightarrow 1 + ctg^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$

חלוקה ב- $\sin^2 A$

ולכן: $ctg^2\frac{\theta}{2} = \frac{2El^2}{\mu q_1 q_2}$

17.11.04.

דוגמאות:

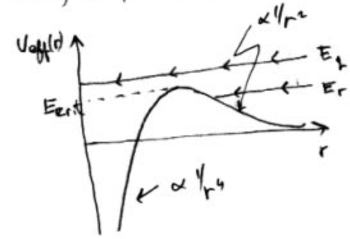
1) נתון הפוטנציאל המרכזי: $$U(r) = -\frac{k}{r^4}$$

א. האם ישנם מסלולים מעגליים בפוטנציאל זה? האם הם יציבים?

ב. נתון כי החלקיק מגיע מ- $r=\infty$ עם מהירות V, מה צריך להיות האימפקט פרמטר" b (פרמטר פגיעה = הכמה מספספים את "הכוון בגיעה"), כדי שהחלקיק יבלע ע"י הפוטנציאל.

פתרון:

הפעם הפוטנציאל האפקטיבי נראה:



האנרגיה האפקטיבית:

$$\frac{1}{2}m\dot r^2 + \underbrace{\underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2}}_{\text{צנטריפוגלי}} - \underbrace{\frac{k}{r^4}}_{\text{משיכה}}}_{U_{eff}(r)} = E$$

כדי שתהיה תנועה מעגלית:

הפתרון "מעגלי" : $\dot r = 0$

$$\frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^4} = E$$

אנו מחפשים שיווי משקל/מינימום, נגזור לפי r:

$$-\frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{4k}{r^5} = 0 \Rightarrow \frac{4k}{r^2} = \frac{\ell^2}{m} \Rightarrow r = \sqrt{4km}\,\frac{1}{\ell}$$

ז.א. יש לנו את הרדיוס של התנועה המעגלית בהינתן ה- ℓ של החלקיק (למשל).

פתרונות אלו אינם יציבים היות וכל הפרעה קטנה, והחלקיק יברח מנקודת שיווי המשקל. כפי שניתן לראות מהפוטנציאל.

אם אנו רוצים קשר עם $\dot\varphi$:

$$\dot\varphi = \frac{\ell}{mr^2} = \frac{2\sqrt{km}}{mr^3} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{2}{r^3}$$

כדי לענות על חלק ב', אנו צריכים את התנאי (לגבי אנרגיה) בשביל הפוטנציאל.

ד. נציב $r = \frac{\sqrt{4km}}{l}$ בביטוי עבור האנרגיה:

$$E_{crit} = \frac{l}{2mr^2} - \frac{k}{r^4} = \frac{l^2}{2mr^2}\,\frac{l^2}{4km} - \frac{kl^4}{16k^2m^2} =$$

$$= \frac{l^4}{m^2k}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) = \frac{l^4}{16m^2k}$$

כשהחלקיק רחוק מאוד, כל האנרגיה שלו זו אנרגיה קינטית. אם מגיע עם מהירות v_∞ (באינסוף):

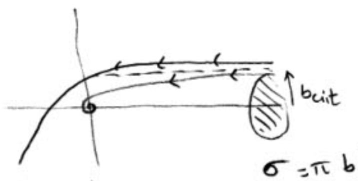
$$E_{crit} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

ואילו התנע הזויתי:

$$l = m|\bar{r}\times\bar{v}| = mbv_\infty$$

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = E_{crit} = \frac{m^4 b^4 v_\infty^4}{16m^2k} \longrightarrow b_{crit} = \left(\frac{8k}{mv_\infty^2}\right)^{1/4}$$

כאשר חלקיק מגיע עם b גדול יותר הוא מתפזר ואילו אם מגיע עם b קטן יותר, הוא נבלע.



$\sigma = \pi b_{crit}^2$

ניתן להגדיר חתך פעולה לבליעה:

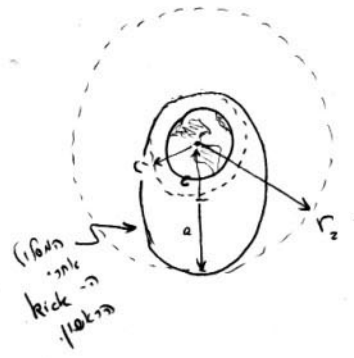
$$\sigma = \pi b_{crit}^2 = \pi\left(\frac{8k}{mv_\infty^2}\right)^{1/2}$$

זהו "השטח" דרכו צריך להגיע החלקיק כדי

17.11.04

דוגמא 2

לוויין נע מסביב לכדור הארץ ברדיוס r_1, במסלול מעגלי, איזו מהירות ובאיזה כיוון יש לתת ללוויין על מנת שבזה יגיע למסלול r_2, מה המהירות השניה שיש לתת לו על מנת שישאר במסלול מעגלי.



פתרון:

אחרי ה"בוסט" הראשון, אנו רוצים מסלול אליפטי שהנקודה הקרובה ביותר תהיה r_1 ושהנקודה הרחוקה ביותר תהיה r_2.

אליפסה: $2a = r_{min}+r_{max}$

c הוא המרחק מהמרכז אל המוקד = $c = a - r_1$

$$c = \frac{r_2-r_1}{2}$$

לכן, אנו מחפשים מסלול עם: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}$

$$= m_\oplus m_s \cdot \frac{m_\oplus m_s}{m_\oplus + m_s} \cong m_\oplus m_s^2$$

מהשוואה למשוואת המסלול:

$$\frac{G m_\oplus m_s \mu}{\ell^2} = \underbrace{\frac{a}{b^2}}_{} = \frac{r_1+r_2}{2r_1r_2}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 = \frac{(r_1+r_2)^2}{4} - \frac{(r_1-r_2)^2}{4} = r_1r_2$$

לכן:

$$\ell = \sqrt{2Gm_\oplus m_s^2 \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}} = m_s r_1 v$$

מצד שני תנע זוויתי זה $\ell = mrv$ כי $v \perp r$ בנקודה הנ"ל!

כלומר, המהירות צריכה להיות:

$$v = \sqrt{2\frac{GM_\oplus}{r_1}\frac{r_2}{r_1+r_2}}$$

אולם המהירות ההתחלתית היא:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_1}}$$

(ומשם, ניתן להציב $r_2=r_1$!).

לכן השינוי במהירות שיש לתת ללוויין:

$$\Delta v = v - v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right)$$

באותה צורה ניתן לתת שינוי במהירות בנקודה הרחוקה ביותר (הנקודות אָפוֹגֵיָה להבדיל מפֵּרִיגֵאָה, הנקודה הקרובה ביותר), כדי להשאיר את הלוויין במסלול מעגלי שוב:

$$\Delta v_2 = v_2 - v_2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

$r_1 \leftrightarrow r_2$ (החלפת תפקידים)

כך משנים מסלולים של לוויינים.

(זאת הדרך היעילה ביותר היות והעבודה אותו עושה הכח של המנועים נותנת הכי הרבה אנרגיה כי: $v \parallel F$).