בעיית שני הגופים (בעיית קפלר)

נסתכל על שני גופים הפועל ביניהם כח משמר לאורך הקו המחבר אותם זה לזה. בהמשך נראה כי ניתן לכתוב את הבעיה בצורה פשוטה יותר.

נתחיל במשוואות התנועה לשני החלקיקים:

$$m_1 \ddot{r}_1 = F_1^{(ext)} + \vec{f}_{12}$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = F_2^{(ext)} + \vec{f}_{12}$$

מחבור שני המשוואות מקבל:

$$\underbrace{m_1\ddot{r}_1 + m_2\ddot{r}_2}_{\substack{\text{מהגדרה של מרכז מסה} \\ =(m_1+m_2)\ddot{R}_{cm}}} = \overbrace{F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)}}^{\text{הכח החיצוני הכולל שפועל על המערכת.}} + \underbrace{\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}}_{\overset{!!}{\text{מהחוק השלישי של ניוטון.}}}$$

$$\left(R_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i r_i\right)$$

ז.א. מרכז המסה נע בהשפעת הכח החיצוני על המערכת.

כעת נחלק את המשוואות ב-$1/m_1$ וב-$1/m_2$ ונחסיר ביניהן:

$$\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2 = \underbrace{\frac{1}{m_1}F_1^{(ext)} - \frac{1}{m_2}F_2^{(ext)}}_{} + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{f}_{12}$$

אם אין כוחות חיצוניים או אפילו אם יש שדה כבידה קבוע, האיבר האמצעי מתאפס:

$$\frac{1}{m_1}F_1^{(ext)} - \frac{1}{m_2}F_2^{(ext)} = 0$$

(או זניח...).

(למשל, שני חלקיקים טעונים כשהחלקיק הקרוב הכי רחוק מאוד מהמרחק בין שני החלקיקים או למשל זוג כוכבים וכו'...). כשדה הכבידה $\underset{=\vec{g}}{}$ קבוע ($\vec{F}_i = m_i\vec{g}$) ואז צורתית מקבלים אפס.

במקרה כזה, מתקבל:

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\vec{f}_{12}$$

נגדיר את μ (הנקרא "מסה מצומצמת") כ- $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

ואת $\vec{r}$ הוקטור המחבר את 2 ל-1: $\vec{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$

ונקבל משוואה עבור $\vec{r}$:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(r)$$

-2-

17.11.04

מה המשמעות של מה שקיבלנו?

את הבעיה של שני גופים ניתן לתאר כתנועה של מרכז המסה + תנועה של הוקטור המחבר את שתי המסות כאילו והיתה לנו מסה יחידה עם מסה m הנעה בפוטנציאל מרכזי עם אותו הכח הפועל בין חלקיקים 1 ו-2, ומרחק $\vec{r}$ מהראשית.

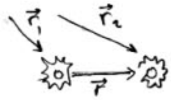
* למה שווה המסה המצומצמת במערכת כדו"ה - שמש?

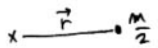
$$\mu = \frac{\overset{\text{כדו"א}}{m_\oplus}\,\overset{\text{שמש}}{m_\odot}}{m_\oplus + m_\odot} \underset{m_\odot \gg m_\oplus}{\simeq} m_\oplus$$

כלומר בבעיה הזו אנו יכולים להניח בקירוב כי יש לנו את מסת כדו"ה הנעה מסביב למרכז.

* אם יש שתי מסות m שוות - למשל שני כוכבים דומים:

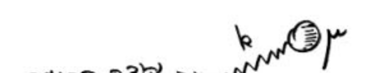
$$\mu = \frac{m \cdot m}{m+m} = \frac{m}{2}$$

כלומר הבעיה של  אקוויוולנטית לבעיה:



* דוגמא נוספת: שתי מסות m_1 ו- m_2 על קפיץ, היכולות לנוע במרחב ללא כוחות חיצוניים.

את התנועה ניתן לתאר כתנועה של מרכז המסה + תנועה של הוקטור r המחבר את שתי המסות, כאילו ו-



כאשר:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

מה שעשינו למעשה היה לעבור מתיאור של הבעיה ע"י הקואורדינטות $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_2$ ל- $\vec{r}$ ו- $\vec{R}_{cm}$, הנתונים ע"י הקשר:

$$\begin{cases} \vec{R}_{cm} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2) \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

את הקשר הזה ניתן להפוך ולקבל:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$$

מה האנרגיה הקינטית במערכת החדשה? אנו אומרים לקבל $K = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$

היא והבעיה אקוויולנטית לבעיית גוף עם מסה μ. נראה זאת:

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + 2\frac{\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\vec{R}}_{CM}^2 - \frac{2\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \underbrace{\frac{\dot{\vec{R}}_{CM}\cdot\dot{\vec{r}}\,(m_1m_2 - m_2m_1)}{m_1+m_2}}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}}_{=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}=\mu}\dot{\vec{r}}^2$$

$$= \frac{\overset{(m_1+m_2)}{M}}{2}\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2$$

באותה דרכה ניתן לקבל:

$$\vec{L} = M\vec{R}_{CM}\cdot\dot{\vec{R}}_{CM} + \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$$

<u>תנועה בשדה כבידה (והכוח האלקטרוסטטי גם! - באותו העיקר).</u>

כוחות אלו מקיימים גם כוח בין שני חלקיקים $\vec{f}(r) = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$

ה-α תלוי בכוח עצמו:

עבור כבידה: $\alpha = -Gm_1m_2$

אלקטרוסטטי: $\alpha = q_1q_2$ (c.g.s)

$= kq_1q_2$ (m.k.s)

(ב- c.g.s הקבוע k [קבוע] נבלע ביחידות של המטען).

הפוטנציאל הוא: $U(r) = \frac{\alpha}{r}$

משימור אנרגיה, מתקיים:

$$K + U = const$$

או:

$$K_{CM} + K' + \frac{\alpha}{r} = const$$

ללא כוחות חיצוניים, K_{cm} הוא קבוע ולכן: $E' = K' + U = const$

(נבדוק את ה' מה - E' - ונסתכל רק על התנועה ב- $\hat{r}$).

ונקבל:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2}+\frac{k}{r}=E=const.$$

אבל, את $\dot{\vec{r}}^{\,2}$ ניתן לכתוב כ: $\dot{\vec{r}}^{\,2}=(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\varphi}\hat{\varphi})^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2$

כפי שראינו כבר מקודם! לכן, שימור אנרגיה נותן:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2+\frac{k}{r}=E$$

אולם, משימור תנע זויתי: $\mu r^2\dot{\varphi}=l=const$, לכן, נכתוב את הביטוי בעזרת הקבוע l:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{l^2}{2\mu r^2}+\frac{k}{r}=E$$

עכשיו, המשוואה הנ"ל עבור $\frac{dr}{dt}$ ניתנת לפתרון ע"י הפרדת משתנים:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{l^2}{2\mu r^2}-\frac{k}{r}\right)$$

$$\int_{r(t=t_0)}^{r(t)}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{l^2}{2\mu r^2}-\frac{k}{r}\right)}}=\int_{t_0}^{t}dt$$

האינטגרל הזה מגעיל!

ניתן לפתור אותו ע"י החלפת משתנים: $u=1/r \leftarrow dr=-1/u^2\,du$

רק שמתקבל האינטגרל:

$$-\int_{u(t=t_0)}^{u(t)}\frac{du}{u^2\sqrt{E-\frac{l^2}{2\mu}u^2-ku}}$$

ולאינטגרל זה יש פתרון בספרי אינטגרלים.

אם משתמשים בפתרון, ניתן לקבל שאיזו שהיא פונקציה של u (ולכן גם של r) תלויה בזמן:

$$f(r)=t$$

זהו ביטוי סתום עבור $r(t)$. לא נחשב את היום וזה לא יותר מידי [illegible]!

אנחנו מעדיפים, כרגע, לקבל ביטוי עבור $r(\varphi)$. נראה כי ניתן לקבל ביטוי פשוט יחסית ע"י טריק מלוכלך או לחילופין ע"י אינטגרל דומה לזה הכתוב למעלה.

17.11.04

חישוב $r(\varphi)$ בבעיית קפלר:

אותי מעניין כעת למצוא ביטוי עבור $r(\varphi)$ בבעיית קפלר. סיבה אחת היא שניתן למצוא ביטוי פשוט!

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}$$

על התנועה, אנו יודעים ש-

כשמוציאים שורש יש שני פתרונות. המשמעות היא שסדרו אותו מצד r, החלקיק יכול לנוע פנימה או החוצה.

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

אני יכולים להלך החוצה את t ע"י שימוש בשתי המשוואות:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\,\frac{dt}{d\varphi}}_{\text{חוק השרשרת}} = \frac{dr}{dt}\,\frac{1}{\dot{\varphi}} = \pm\frac{\mu r^2}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}$$

ע"י הפרדת משתנים ניתן לפתור את הבעיה ל- $r(\varphi)$:

$$\pm\int_{r(\theta_0)}^{r(\theta_1)} \frac{dr}{\frac{\mu r^2}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}\right)}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi$$

כשעוברים מ-r ל-u, הסימן של ± כיוון שהחלקיק נע בכיוון ההפוך

האינטגרל נהיה פשוט יותר אם מחליפים משתנים:

$u = 1/r \qquad du = -1/r^2\, dr$

$$\mp\int_{u(\varphi_0)}^{u(\varphi_1)} \frac{du}{\frac{\mu}{l}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu}u^2 - \alpha u\right)}} = \varphi_1 - \varphi_0$$

גם לאינטגרל זה, כמו לאינטגרל בסעיף הקודם יש פתרון בספר אינטגרלים:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\sin^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$$

עבור $a<0$

ז.א. עבור: $a = -\frac{l^2}{2\mu}$, $b = -\alpha$, $C = E$ מציבים:

$$\pm\frac{l}{\sqrt{2\mu}}\left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{l^2}}\sin^{-1}\left(\frac{-\frac{l^2}{\mu}u - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2El^2/\mu}}\right)\right)\Bigg|_{u(\varphi_0)}^{u(\varphi_1)} = \varphi_1 - \varphi_0$$

$$\mp\left[\sin^{-1}\left(\frac{\frac{l^2}{\alpha\mu}u(\varphi_1) + 1}{\sqrt{1 + 2El^2/\mu\alpha^2}}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\frac{l}{\alpha\mu}u(\varphi_0) + 1}{\sqrt{1 - 2El^2/\mu\alpha^2}}\right)\right] = \varphi_1 - \varphi_0$$

17.11.04

נגדיר $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\alpha^2\mu}}$. לגודל זה קוראים אקסצנטריות (eccentricity)

ונקבל:

$$\sin^{-1}\left(\frac{\frac{\ell^2}{\alpha\mu}u(\varphi_1)+1}{\varepsilon}\right)=\pm(\varphi-\varphi_0)+\underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{\frac{\ell}{\alpha\mu}u(\varphi_0)+1}{\varepsilon}\right)}_{\tilde{\varphi}}$$

נגדיר כ- $\tilde{\varphi}$ דהיינו, במקום להשתמש ב- φ_0 כקבוע אינטגרציה, נשתמש בגודל המסומן.

המשוואה ההפוכה, דהיינו $u(\varphi)$ היא לכן:

$$\frac{1}{r}=u=\frac{\alpha\mu}{\ell^2}\left(1-\varepsilon\sin\left(\pm(\varphi-\varphi_0)\right)\right)$$

משמעות ה-"$\pm$" היא שהחלקיק (או כוכב) יכול לנוע בכיוון השעון או בכיוון ההפוך.

נחזור על הדריבציה במקום ע"י שימוש במשוואת שימור אנרגיה (שהיא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון) נשתמש במשוואה של כוחות (אפקטיביים במקרה זה).

אנו רואים את משוואת האנרגיה בצורה:
$$\underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{\ell^2}{2\mu r^2}+\overbrace{\frac{\alpha}{r}}^{U(r)}}_{U_{eff}(r)}=E$$

אם נגזור את המשוואה הזו, נקבל:

$$\mu\dot{r}\ddot{r}-\frac{\ell^2}{\mu r^3}\dot{r}-\frac{\alpha\dot{r}}{r^2}=0$$

היות ואנו מעוניינים במקרה של $\dot{r}\neq 0$, נחלק בו ונקבל:

$$\mu\ddot{r}=\frac{\alpha}{r^2}+\frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

המשוואה הזו היא מהצורה:
$$"m"a=F_{eff}$$

כאשר:
$$F_{eff}=-\frac{dU_{eff}}{dr}=\frac{\ell^2}{\mu r^3}+\frac{\alpha}{r^2}$$

עם אותו ה-U_{eff} שהוגדר למעלה.

17.11.04

משוואה זו היא משוואה דיפרנציאלית מסדר שני (היות ונגזרת שניה בזמן מופיעה). לרוב, משוואות כאלו הן מסובכות יותר לפתירה מאשר משוואות מסדר ראשון (כמו המשוואה המתקבלת משמור אנרגיה) אולם, במקרה זה ניתן לפתח מעניין ולקבל משוואה פשוטה הרבה יותר.

ראשית, אנו רוצים להעביר את המשוואה למשוואה עבור $r(\varphi)$ שתתן לנו את הצורה הגיאומטרית של המסלול. כדי לעשות זאת, יש להחליף את $\frac{d}{dt}$ ב- $\frac{d}{d\varphi}$ וכו'.

* משימור תנע זויתי:

$$\frac{d\varphi}{dt}\equiv\dot{\varphi}=\frac{l}{\mu r^2}$$

לכן, נגזרת של פונקציה f כלשהי לפי t תהיה:

$$\frac{df}{dt}=\frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{df}{d\varphi}\dot{\varphi}=\frac{df}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2}$$

נגזור כעת שוב לפי הזמן:

מגדירים את g כ- $\frac{df}{dt}$; שימוש בנוסחה קודמת

$$\frac{d^2f}{dt^2}\equiv\frac{dg}{dt}=\frac{l}{\mu r^2}\frac{dg}{d\varphi}=\frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{df}{d\varphi}\frac{l}{\mu r^2}\right)\qquad\left(g=\frac{l}{\mu r^2}\frac{df}{d\varphi}\quad\text{כאשר}\right)$$

הצבה של g.

$$=\frac{l^2}{\mu^2r^4}\frac{d^2f}{d\varphi^2}-\frac{2l^2}{\mu^2r^5}\frac{df}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi}$$

פונקציה ב().

נציב כעת $f=r$ ונקבל:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{l^2}{\mu^2r^4}\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2l^2}{\mu^2r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

משוואתנו תראה לכן:

$$\frac{l^2}{\mu r^4}\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2l^2}{\mu r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{l^2}{\mu r^3}+\frac{\alpha}{r^2}$$

וכעת הניחוש לעבור למשתנה $u=1/r$. אם נגזור החלפה זו נקבל:

$$u=1/r\ \underset{\text{גזירה לפי }\varphi}{\Longrightarrow}\ \frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\ \underset{\text{גזירה נוספת לפי }\varphi}{\Longrightarrow}\ -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2}+\frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

אם נכתוב את המשוואה הנ"ל בצורה אחרת, נראה שהגזירה זו תועיל לנו!!

$$\frac{l^2}{\mu r^2}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}_{-\frac{d^2u}{d\varphi^2}}\Bigg)=\frac{l^2}{\mu r^3}+\frac{\alpha}{r^2}$$

ז.א. אנו מקבלים כי:

$$\frac{\ell^2}{\mu}u^2\left(-\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) = \frac{\ell^2}{\mu}u^3 + \alpha u^2 \qquad (\text{כאמור } 1/r = u \,!)$$

נחלק ב- u (לא מעניין אותנו הפתרון $u=0$) ונקבל:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\alpha\mu}{\ell^2}$$

משוואה זו היא משוואה דיפרנציאלית (מכילה נגזרות של u) מסדר שני (נגזרת שניה ב- φ) לינארית (מופיע רק u או נגזרותיו בחזקה ראשונה או אפס בכל איבר). למשוואות כאלו ישנו פתרון סטנדרטי.

ראשית, יש לשים לב שהמשוואה אינה הומוגנית, כלומר ישנו איבר שאינו תלוי ב- u. הכלל אומר הוא שיש לחפש פתרון u המורכב מפתרון פרטי (כלשהו!) למשוואה הלא הומוגנית + פתרון כללי למשוואה ההומוגנית.

$$u = u_h + u_p$$

$$u'' + u = -a \qquad \left(a = \frac{\alpha\mu}{\ell^2}\right)$$

$$u_h'' + u_p'' + u_h + u_p = -a$$

ברור ש $u_p = -a$ הוא פתרון כי $u_p''=0$ במקרה זה: $u_p'' + u_p = -a$ נחסר משוואה זו ונקבל:

$$u_h'' + u_h = 0 \rightarrow u_h'' = -u_h$$

כעת נשאל, איזו פונקציה אם גוזרים אותה פעמיים מקבלים את אותה הפונקציה עם סימן הפוך? התשובה: sin ו- cos, אך גם sin כפול בקבוע וכו'.

ז.א. הפתרון הכללי של החלק ההומוגני:

$$u_h = A\cos\varphi + B\sin\varphi \equiv A\cos(\varphi - \varphi_0)$$

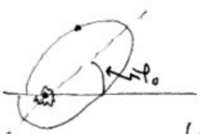
ניתן לכתוב זאת כבוונה.

הפתרון הכללי למשוואה הלא הומוגנית:

$$u = u_h + u_p = A\cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{\alpha\mu}{\ell^2}$$

הפתרון פותר את המשוואה הלא הומוגנית ומכיל שני קבועי אינטגרציה (A ו- φ_0). היות והמשוואה היא מסדר שני הפתרון הכללי צריך להכיל שני קבועי אינטגרציה ולכן הפתרון שמצאנו הוא הכי כללי.

מהם הקבועים A ו- φ_0? φ_0 פשוט קובע את ציר המסלול:



ומהו A? כדי למצוא את A, נמצא את ערכי הקיצון של המסלול (אם מדובר בפלנטה סביב השמש, הנקודה הקרובה ביותר (ה- u הגדול ביותר!) נקראת פריהליון (perihelion).

בנקודות קיצון של המסלול, מתקיים שהאיבר הקינטי $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ מתאפס:

$$E - \alpha u - \frac{\ell^2}{2\mu}u^2 = 0$$

$$u_{1,2} = -\frac{\mu\alpha}{\ell^2}\left[1 \mp \underbrace{\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}}}\right] = -\frac{\mu\alpha}{\ell^2}\left[1\mp\varepsilon\right]$$

מגדירים האקסצנטריות ε (eccentricity)

<u>מה קורה עבור כח גרביטציה ו- $E<0$</u>. במקרה כזה:

$$0 < \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}} < 1$$

כמו כן:

$$u_{max} - u_{min} = -\frac{2\mu\alpha}{\ell^2}\varepsilon$$

אולם ממשוואת המסלול שקבלנו:

$$u_{max} - u_{min} = 2A$$

ולכן:

$$A = \frac{(-\alpha)\mu}{\ell^2}\varepsilon$$

ומשוואת המסלול היא:

$$\frac{1}{r(\varphi)} = u(\varphi) = \frac{(-\alpha)\mu}{\ell^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

$$= \frac{Gm_1m_2\mu}{\ell^2}\left(1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right)$$

זוהי משוואה של אליפסה. (ראה ציור).